

Termingeschäfte und Derivate

Hans Rau-Bredow

hans.rau-bredow@uni-wuerzburg.de

Foliensatz:

www.rau-bredow.de



über mich:

- **Studium Mathematik und Philosophie, Universität Bonn**
- **Studium Wirtschaftsmathematik, TU München**
- **Promotion in Betriebswirtschaftslehre, LMU München:**
„Zur theoretischen Fundierung der Institutionenökonomie“
- **Habilitation für Betriebswirtschaftslehre, JMU Würzburg:**
„Finanzierungsverträge und Konzernbildung“

Termine:

Montag, 02.03.2026, 10:15 Uhr

Dienstag, 03.03.2026, 10:15 Uhr

Freitag, 06.03.2026, 10:15 Uhr

Ort: Seminarraum 321

Gliederung

Montag:

1. Futures

Dienstag:

2. Optionen

**3. Ausblick: Andere Derivate, insb.
Swaps**

Freitag:

Wiederholung und Ergänzungen

Basisliteratur

Hull, John: Optionen, Futures und andere Derivate (Options, Futures and Other Derivatives)

**(versch. Auflagen, hier wurde die deutsche Ausgabe von 2015 (9. Auflage) benutzt, Link zum Inhaltsverzeichnis der 9. Auflage:
<http://d-nb.info/1075875099/04↑>)**

Rau-Bredow, Hans (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets

online: <https://mpira.ub.uni-muenchen.de/111688>

Oil Prices (WTI)



www.economicshelp.org | Source St Louis Fed - DCOILWTICO - Nov 2021

Januar 2008:

Spotpreis: 40 \$ / Barrel

12-Monats Future: 60 \$ / Barrel („Super Contango“)

**=> Widerspruch zum „Law of One Price“
und Arbitrage-Opportunität?**

Risikoloser Arbitragegewinn durch Carry-Trade:

- **kaufe physisches Öl zu 40 \$ / Barrel**
- **miete Lagerflächen für 12 Monate**
- **schließe Termingeschäft ab, das Öl in 12 Monaten zum Festpreis von 60 \$ / Barrel zu verkaufen**

**=> Gewinn = 20 \$ minus Lager- und Zinskosten
(sog. Cost of Carry)**

- **da es in effizienten Kapitalmärkten keinen „Free Lunch“ gibt, werden solche Arbitragemöglichkeiten nach kurzer Zeit wieder verschwinden.**
- **konkret werden die Handelsaktivitäten zum Anstieg des Spotpreises und zu einem fallenden Futures-Preis führen, bis die Differenz genau den Lager- und Zinskosten entspricht.**
- **mit derartigen Überlegungen können also Aussagen zum Verhältnis von Spotpreis und Futures-Preis gemacht werden (insbesondere ohne Rückgriff auf individuelle Risikopräferenzen)**

Thema dieser Vorlesung:

- Funktionsweise von Futures und Optionen**
- arbitragefreie Bewertung von Futures und Optionen**

1. Futures

1. Einführung

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

Termingeschäft (Forward/Future)

$t = 0$ (heute)

A und B vereinbaren heute in $t = 0$ die Lieferung eines Wirtschaftsgutes zu einem späteren Zeitpunkt $t = T$ (z.B. in 12 Monaten) zum Festpreis F_0 (z.B. $F_0 = 60$ \$).

$t = T$ (z.B. in 12 Monaten)

Im Zeitpunkt $t = T$ wird das Wirtschaftsgut geliefert und der Kaufpreis $F_0 = 60$ \$ überwiesen.

Forwards vs. Futures

**Forwards: Außerbörslich (over the counter OTC)
gehandelte Terminkontrakte, nicht anonym**

**Futures: Börsengehandelte Terminkontrakte
standardisiert (z.B. vorgegebene Fälligkeiten jeweils am
dritten Freitag im März/Juni/September/Dezember),
anonym**

Terminstruktur von Futures am Beispiel von Agrar-Terminmarktnotierungen am 26. März 2013

Weizen MATIF €/t		
Mai 13	243,25	
Nov 13	214,75	
Jan 14	213,75	
Mrz 14	213,00	

Braugerste MATIF €/t		
Mrz 13	246,00	
Mai 13	250,00	-
Nov 13	252,00	-
Jan 14	244,00	-

MATIF = Marché de Terme International de France
(heute Euronext Paris)

Contango: Futures-Preis F_0 größer als Spotpreis S_0

Backwardation: Futures-Preis F_0 kleiner als Spotpreis S_0

Erfüllung von Futures-Kontrakten

- 1. Physische Lieferung**
- 2. Barausgleich (cash settlement)**

Kontraktsspezifikationen Chicago Mercantile Exchange

(www.cmegroup.com)

Öl: [Physische Lieferung](#)

Weizen: **Physische Lieferung**

Gold: **Physische Lieferung**

S&P 500 (Aktienindex): **Barausgleich**

Bitcoin: **Barausgleich**
**(Referenzpreis: Durchschnittlicher
Handelspreis an mehreren
Kryptobörsen)**

1. Physische Lieferung

- **bei physischer Lieferung gibt es spezifische Anforderungen an die Qualität lieferbarer Güter:**
 - **Öl: Schwefelgehalt, relative Dichte ...**
 - **Weizen: Feuchtigkeit, Besatz, Bruchkorn, Auswuchs ...**
- **außerdem muss ein Lieferort bestimmt werden**

2. Barausgleich (cash settlement)

Illustratives Beispiel: Ein Landwirt schließt im Januar ein Termingeschäft über den Verkauf (short) von einer Tonne Weizen im September zum Festpreis von $F_0 = 200 \text{ €/t}$ ab.

Bei Fälligkeit im September sei der Spotpreis $S_T = 193 \text{ €/t}$

**=> Der Barausgleich beträgt $F_0 - S_T = 200 - 193 = 7 \text{ €/t}$,
der Verkaufserlös beträgt 193 €/t , insgesamt also 200 €/t
(Bei einem Weizenpreis von $S_T = 206 \text{ €/t}$ wären
dagegen 6 €/t an den Kontrahenten zu zahlen)**

Physische Lieferung ist selten

- **Um physische Lieferung zu vermeiden, werden in der Praxis die meisten Kontrakte kurz vor Fälligkeit durch entsprechendes Gegengeschäft geschlossen.
(etwa weil der Landwirt den Weizen lieber an einer lokalen Mühle abliefern will)**
- **Dies bedeutet aber nicht zwingend, dass es sich immer um reine Spekulationsgeschäfte handelt. Die Kontrakte könnten trotzdem zu Hedging-Zwecken abgeschlossen worden sein.**

Physische Lieferung beim Futures-Kontrakt auf Lebendrind (aus Hull Business Snapshot 2.1:)

- **ein New Yorker Händler hat es versäumt, einen Kontrakt auf Lebendrind rechtzeitig zu schließen**
- **er musste sich deshalb mit den Modalitäten der physischen Lieferung auseinandersetzen.**
- **tatsächlich war eine Reise in den mittleren Westen erforderlich, um die Rinder entgegenzunehmen und für deren Unterbringung bis zum Wiederverkauf sorgen.**

Vorzeitiges Closing von Futures durch Gegengeschäft

$t = 0$ Verkauf eines Futures auf Weizen zu $F_0 = 200 \text{ €/t}$

$t < T$ Kurz vor Fälligkeit liegt der Spotpreis bei $S_t = 193 \text{ €/t}$.

Da die Restlaufzeit vernachlässigbar ist, liegt der Kurs des Futures ebenfalls bei $F_t = 193 \text{ €/t}$.

Durch den Kauf eines Futures zu $F_t = 193 \text{ €/t}$ wird die Position jetzt geschlossen.

Der Investor (Landwirt) ist also verpflichtet ...

- **am Fälligkeitstag T Weizen für 200 €/t zu verkaufen
(weil er ursprünglich Futures verkauft hat)**
 - **und ebenfalls am Fälligkeitstag T Weizen zu 193 €/t zu kaufen
(weil er beim Closing der Position entsprechende Futures gekauft hat)**
- => Beide Geschäfte werden miteinander verrechnet und ergeben einen Gewinn von 7 € je Tonne Weizen.**

Negativer Ölpreis im April 2020

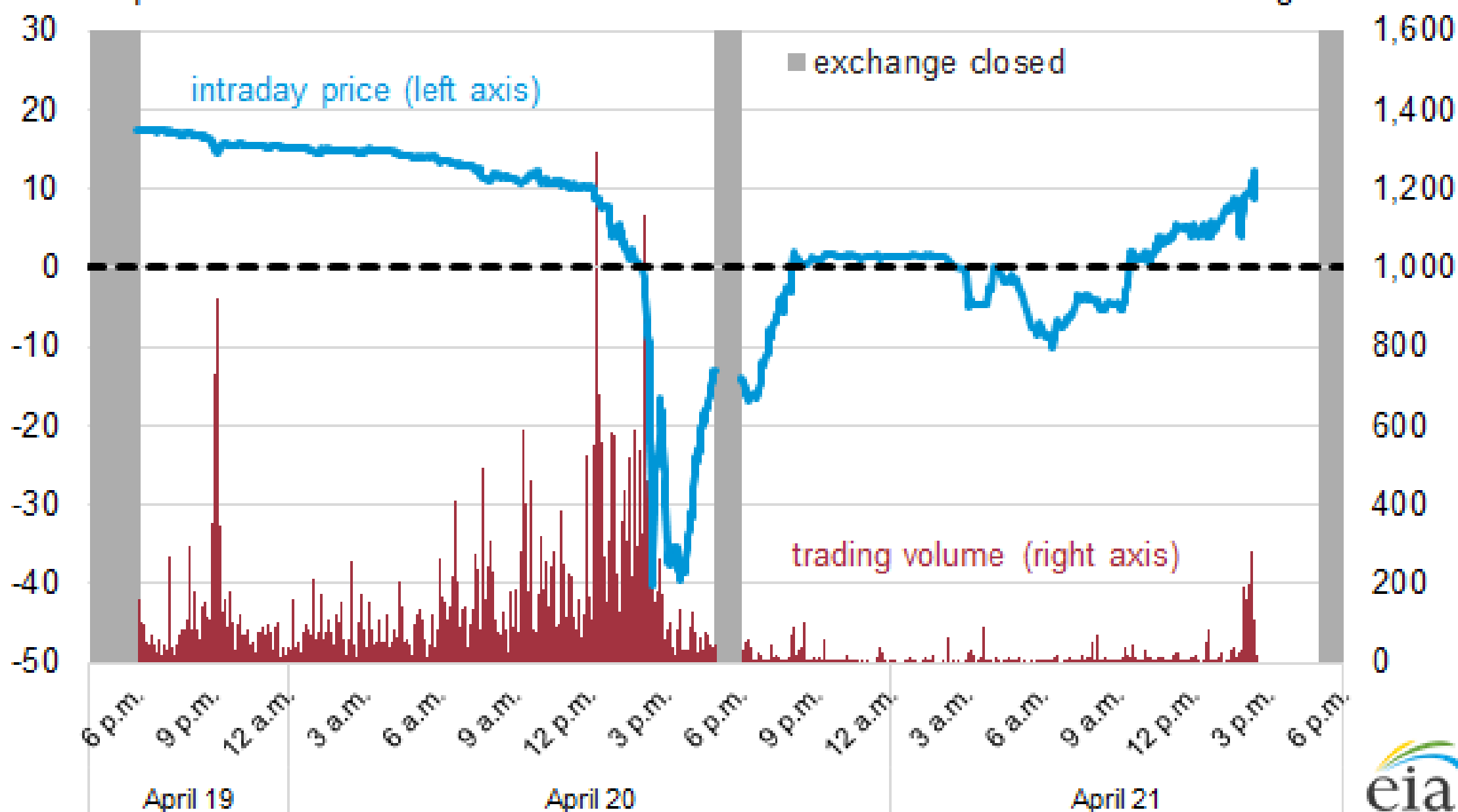
- Im April 2020 notiert der im Mai fällige Öl-Kontrakt (WTI) im Minus: $F_t < 0$ (in der Spitze bis minus 40 \$, später fällige Futures notierten durchgängig im Plus)
[mehr dazu ↑](#)
- Hintergrund: Massive Beschränkungen der Weltwirtschaft wegen Corona-Pandemie.
- Nachfrageschock führte zu extremen Überangebot von Öl und knappen Lagerkapazitäten.

- **Der Kontrakt sah physische Lieferung im Mai 2020 vor: Inhaber einer long-Position mussten den Kontrakt also rechtzeitig (letzter Handelstag 21. April 2020) durch Verkauf schließen, um eine physische Lieferung und schwer kalkulierbare Lagerkosten zu vermeiden ([link zu den Kontraktbedingungen](#) ↑).**
- **Negativpreis bedeutet, man muss Geld bezahlen, damit das Öl abgenommen wird.**
- **Öl wird gewissermaßen wie Abfall bewertet, für dessen Entsorgung ebenfalls Geld bezahlt werden muss. Dagegen sind negative Preise z.B. für Weizen oder Gold schwer vorstellbar, da man sich dieser Güter einfach entledigen kann. Bei Strom-Futures kommen aber negative Preise gelegentlich vor.**

Figure 1. May 2020 West Texas Intermediate futures contract

dollars per barrel

trading volume



2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

- **Handel**
- **Absicherungsstrategien**
- **Margin Requirements**

Geschichte Termingeschäfte:

Von der Tontafel zum Hochfrequenzhandel

- **Termingeschäfte für Agrarprodukte (Getreide) bereits im antiken Mesopotamien (Codex Hammurapi ↑ 1750 v. Chr.)**
- **während der Tulpenmanie ↑ in den Niederlande im 17 Jh. wurden Termingeschäfte für noch nicht ausgegrabene Tulpenzwiebeln getätigt**
- **Reis-Börse in Osaka/Japan gegründet 1697 (existierte bis 1939), Geburtsstunde des organisierten Terminhandels**
- **Öl-Futures seit 1983 als Reaktion auf Ölkrisen der 70er**

Volumen des Derivatemarktes

- seit der Deregulierung der 1980er Jahre ist der Terminhandel exponentiell gewachsen.
- Das nominale Volumen soll ca. *800.000 Mrd. \$* betragen ([siehe BIS derivatives statistics](#)), ein Vielfaches des globalen BIP von aktuell ca. *120.000 Mrd. \$*
- davon sollen rund 80% auf Zinsderivate (Zinsswaps) entfallen.

Regulierung des Derivatemarktes

- **seit der globalen Finanzkrise von 2008 wurde die Regulierung des Derivatemarktes verschärft.**
- **standardisierte Derivate müssen über zentrale Clearingstellen abgewickelt werden.**
- **diverse Meldepflichten, um das Risiko von Domino-Effekten zu erkennen.**
- **Gegenparteirisiko soll durch die Stellung höherer Sicherheiten (Margins) reduziert werden**

Nahrungsmittel-Futures und Financialization

- **insbesondere Agrarrohstoffe werden von Banken, Hedgefonds und Indexfonds zunehmend als reine Finanzaktiva behandelt.**
- **dabei übersteigt das Handelsvolumen der Derivate die physisch vorhandene Menge oft um das Zehnfache.**
- **Manche sehen hierin eine Ursache für die Verteuerung von Grundnahrungsmitteln**

These: Herdenverhalten führt zu Preis-Overshooting

- **Algorithmen könnten Massenkäufe auslösen, wenn bestimmte Preismarken überschritten werden.**
- **Dies führt zu einer künstlichen Teuerung. Der Preis entkoppelt sich von der Realität und wird nicht mehr durch Angebot und Nachfrage bestimmt**
- **dabei dient die Preisbildung an den Terminmärkten auch als Orientierungsmarke für die Spotmärkte**

Gegenthese: Terminmarkt beeinflusst nicht die realen Märkte

- **Wenn Spekulanten nur "Papier-Kontrakte" kaufen, aber Getreide weiterhin physisch verfügbar ist, hat das keinen Einfluss auf den Preis für physisches Getreide.**
- **Preise steigen, weil Getreide knapper wird. Der Terminhandel ist nur der Bote der schlechten Nachricht.**
- **Hohe Terminkurse sind außerdem ein starker Anreiz für die Landwirte, mehr zu produzieren.**

Keine höhere Lagerbildung beobachtbar

- **Spekulation könnte die Preise antreiben, wenn dadurch das Angebot durch Lagerbildung verknapppt wird**
- **möglicherweise wird physisches Getreide aufgekauft, eingelagert und gleichzeitig teurer an der Terminbörse für die Zukunft verkauft(Carry Trade bei Super Contango)**
- **empirisch gibt es aber keine Anzeichen für zunehmende physische Lagerhaltung und künstliche Verknappung von Nahrungsmitteln.**

Bewußte Marktmanipulation durch Cornering

- **Cornering ist der Versuch, durch Aufkauf des physischen Rohstoffs eine monopolähnliche Stellung einzunehmen**
- **die Hunt-Brüder kauften in den 70er Jahren riesige Mengen Silber unter anderem über die Terminbörse, um den weltweiten Silbermarkt zu kontrollieren: [Wikipedia](#)↑**
- **Vincent Kosuga kaufte 1955/1956 fast alle Zwiebeln in Chicago auf und manipulierte so den Zwiebel-Preis. Das führte in den USA zum Onion Futures Act, der den Terminhandel mit Zwiebeln bis heute verbietet.**

Derivate: Fluch oder Segen?

Fluch: Derivate führen zu irrationalen Herdenverhalten und zu Preisblasen und Marktverzerrungen

Segen: Terminmärkte ermöglichen Risikoabsicherung und tragen zu einem effizienteren Preisfindungsmechanismus (F.A. Hayek 1899-1992) bei, indem zu mehr Liquidität und Preistransparenz beitragen.

**Spekulanten verschärfen
Hungersnöte**

**Je höher der Preis für
Grundnahrungsmittel,
desto höher auch der
Profit**

**Nicht vom Wohlwollen des
Metzgers, Brauers und
Bäckers erwarten wir das,
was wir zum Essen
brauchen, sondern davon,
daß sie ihre eigenen
Interessen wahrnehmen.**

Adam Smith (1723 - 1790)

- **Absicherungsstrategien**

Absicherungsstrategien mit Termingeschäften

- **Absicherung gegen fallende Verkaufspreise durch Verkauf (short) von Futures (Landwirte, Ölproduzenten, Goldminen).**
- **Absicherung gegen steigende Einkaufspreise durch Kauf (long) von Futures (Getreidemühlen, Öl-Raffinerien bzw. Fluggesellschaften, Hersteller von Goldschmuck bzw. Elektronikfirmen).**
- **Absicherung gegen Währungsschwankungen falls Einnahmen und Ausgaben in unterschiedlichen Währungen anfallen.**

Hedging-Strategien in der Praxis

- Barrick Gold, weltgrößter Goldproduzent, hat sich lange Jahre gegen fallende Goldpreise abgesichert. Als der Goldpreis ab den 2000er Jahren stieg, wurde das Hedging auf Druck der Aktionäre aufgegeben vgl. [Ahn 2018 S.95 ↑](#)**
- Der Mineralölkonzern Exxon Mobil hat in der Vergangenheit weitgehend auf Hedging verzichtet, da genügend Cash Reserven vorhanden seien, um mögliche Verluste auszugleichen Quelle: [Bloomberg 2015 ↑](#)**
- Mexiko ist bekannt dafür, seine Öleinnahmen auf den Terminmärkten abzusichern. Quelle: [Reuters 2019 ↑](#)**

Theoretische Überlegungen zum Hedging

Irrelevanztheorem von Modigliani/Miller: Anleger bestimmen ihr Risikoexposure unabhängig von den Finanzierungs- und Hedgingentscheidungen der Unternehmen. Z.B. könnten sich Aktionäre von Goldminen falls gewünscht individuell durch den Verkauf von Gold-Futures absichern ("Homemade Hedging")

=> Hedging bedeutet keinen Mehrwert für Aktionäre

Voraussetzung: Reibungslos funktionierende Kapitalmärkte ohne Transaktionskosten

Vorteile des Hedging auf Unternehmensebene

- **mögliche Kostenverteile auf Unternehmensebene beim Abschluss von Termingeschäften**
- **Vorteile bei progressiven Steuersätzen oder bei eingeschränkter Verlustverrechnung, da Hedging die Gewinnausschläge über die Jahre verstetigt**
- **geringere Schwankungen der Gewinne ermöglicht Innenfinanzierung von antizyklischen Investitionen**
- **Hedging reduziert das Insolvenzrisiko**

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (1)

- **Anteilseigner können ihr Portfolio mit weniger Aufwand diversifizieren als ein Unternehmen**
- **Focus auf komplexe Hedging-Strategien kann zur Vernachlässigung des operativen Geschäftes gehen.**
- **Risiko von Verlusten durch „Over-Hedging“, wenn gestiegene Einkaufspreise 1:1 an die Kunden weitergegeben werden können (vgl. dazu Hull 3.2)**
- **Hedging-Kosten werden anders bilanziert als etwa Versicherungsprämien, obwohl die Funktion dieselbe ist.**

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (2)

- **Aktionäre neigen dazu, das Management in guten Zeiten für "entgangenen Gewinne" zu kritisieren, während sie die Risikoabdeckung in schlechten Zeiten als selbstverständlich voraussetzen.**
- **sehr große Unternehmen beeinflussen durch ihre Hedging-Aktivitäten die Preisbildung an den Terminmärkten, d.h. es ist fraglich ob überhaupt eine Absicherung zu fairen Konditionen überhaupt möglich ist.**

- **Margin Requirements**

Margin Requirements und Margin Calls

- **Damit die Handelsteilnehmer jederzeit ihren Verpflichtungen nachkommen können, verlangen die Terminbörsen die Stellung ausreichend hoher Sicherheiten („Skin in the Game“)**
- **Im Fall von Verlusten sind die Handelsteilnehmer zu Nachschüssen verpflichtet (Margin Calls), andernfalls wird die Position unmittelbar liquidiert.**

Der Mechanismus der täglichen Abrechnung (Hull 2.4)

- Kauf von 2 Gold Future Kontrakten (1 Kontrakt = 100 Unzen) zum Kurs von 1.250 \$ je Feinunze.**
- Initial Margin = 6.000 \$ je Kontrakt => insgesamt 12.000 \$ müssen mindestens auf dem Margin-Konto sein**
- Maintenance Margin 4.500 \$ je Kontrakt => Margin Call, falls Saldo < 9.000 \$**
- der tägliche Gewinn/Verlust ergibt sich aus der Differenz des Settlement Preises zum Vortag mal Kontraktwert 100 mal 2 Kontrakte**

<i>Day</i>	<i>Trade price (\$)</i>	<i>Settlement price (\$)</i>	<i>Daily gain (\$)</i>	<i>Cumulative gain (\$)</i>	<i>Margin account balance (\$)</i>	<i>Margin call (\$)</i>
1	1,250.00				12,000	
1		1,241.00	−1,800	−1,800	10,200	
2		1,238.30	−540	−2,340	9,660	
3		1,244.60	1,260	−1,080	10,920	
4		1,241.30	−660	−1,740	10,260	
5		1,240.10	−240	−1,980	10,020	
6		1,236.20	−780	−2,760	9,240	
7		1,229.90	−1,260	−4,020	7,980	4,020
8		1,230.80	180	−3,840	12,180	
9		1,225.40	−1,080	−4,920	11,100	
10		1,228.10	540	−4,380	11,640	
11		1,211.00	−3,420	−7,800	8,220	3,780
12		1,211.00	0	−7,800	12,000	
13		1,214.30	660	−7,140	12,660	
14		1,216.10	360	−6,780	13,020	
15		1,223.00	1,380	−5,400	14,400	
16	1,226.90		780	−4,620	15,180	

Kontrollrechnung

- **Einstiegskurs 1.250 \$ - Ausstiegskurs 1.226,90 \$ = 23,10 \$**
- **Verlust: 23,10 \$ * Kontraktwert 100 * 2 Kontrakte = 4.620 \$**
- **Gesamte Einzahlungen auf das Margin-Konto:**
12.000 \$ + 4.020 \$ (Margin Call) + 3.780 \$ (MarginCall) = 19.800 \$
- **Schlussaldo Margin-Konto: 15.180 \$**
- **Verlust: 19.800 \$ - 15.180 \$ = 4.620 \$ ok**

Stimmen Forward- und Futures-Kurse überein?

(vgl. Hull 5.8 und Business Snapshot 5.2)

- **börsengehandelte Futures werden täglich, OTC Forward Kontrakte dagegen erst bei Fälligkeit abgerechnet.**
- **frühere Verbuchung von Gewinnen ergibt Zinsvorteil, frühere Verbuchung von Verlusten einen Zinsnachteil.**
- **sind Gewinne und Verlust gleich wahrscheinlich, dann heben sich Zinsvor- und -nachteile gegenseitig auf, daher:**

Futures-Preis $\approx$ Forward Preis

Prozyklizität von Margin-Calls

- **Prozyklizität beschreibt den Effekt, dass Margin-Calls genau dann zu einem plötzlichen enormen Liquiditätsbedarf führen, wenn der Markt ohnehin unter Stress steht, und dadurch krisenverschärfend wirken (Margin-Schock)**
- **Dies gilt auch dann, wenn die Derivate rein zu Absicherungszwecken gehalten werden.**

Beispiel:

- **RWE verkauft seine Stromproduktion ein Jahr im voraus für *100 €/MWh*. Es werden also Futures verkauft (short).**
- **Die Produktionskosten betragen *80 €/MWh***
- **Durch den Ukraine Krieg steigt der Strompreis bis auf *700 €/MWh*. Die Kontrakte sind bis zu *600 €/MWh* im Minus. Die Nachschussforderung (Margin Call) setzt das Unternehmen unter erheblichen Stress.**

- **bei Fälligkeit wird der Kontrakt durch die eigene Stromproduktion erfüllt (statt sich zu hohen Kosten am Markt eindecken zu müssen) und die hinterlegte Margin wird freigegeben. Der Margin-Call führt insoweit nur zu einem temporären, allerdings erheblichen Liquiditätsbedarf.**
- **es entsteht kein realer Verlust gegenüber den eigenen Produktionskosten, sondern es handelt sich letztlich um eine entgangene Gewinnchance im Vergleich zum aktuellen Marktpreis.**

KEVIN PAUL JEREMY ZACHARY PENN
SPACEY BETTANY IRONS QUINTO BADGLEY
SIMON MARY DEMI STANLEY
BAKER McDONNELL AND MOORE AND TUCCI

MARGIN CALL



"THE BEST WALL STREET FILM YET"



3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

Carry Trade

- Aktienkurs $S_0 = 40 \text{ €}$
- 3-Monats-Future $F_0 = 43 \text{ €}$
- Zins $i = 4\%$ (1% pro Quartal)

Aktion heute ($t = 0$)

- Kreditaufnahme 40 €
- Aktienkauf zu $S_0 = 40 \text{ €}$
- Verkauf eines 3-Monats-Future mit $F_0 = 43 \text{ €}$

Aktion in 3 Monaten ($t = T$)

- Future wird fällig, Verkauf der Aktie zu $F_0 = 43 \text{ €}$
- von dem Erlös werden 40,40 € ($40 \text{ €} + 1\%$) für die Kreditrückzahlung verwendet

=> Gewinn: 2,60 €

Futures-Bewertung bei *ratierlichem* Zins

- Gewinn p aus einem Carry Trades ist Futures-Preis F_0 minus aufgezinsten Aktienkurs $S_0 (1 + i)^T$:

$$p = F_0 - S_0 (1 + i)^T$$

- In arbitragefreien Märkten sind Carry Trades nicht profitabel. Aus $p \leq 0$ folgt:

$$F_0 \leq S_0 (1 + i)^T$$

Futures-Bewertung bei *stetigem* Zins

- Annahme: Zins wird nicht in festen Raten an diskreten Zeitpunkten (monatlich, quartalsweise, jährlich) gezahlt, sondern kontinuierlicher, stetiger Zufluss (vgl. Hull 4.2).
- Konsequenz: Ersetze $(1 + i)^T$ durch e^{rT}
mit r = stetiger Zins und e = Eulersche Zahl 2,718 ...
Beispiel: $r = 3\%$, $T = 0,5$ Jahre $\Rightarrow e^{0,03 \cdot 0,5} = 1,0151$

$\Rightarrow$ Bei stetigem Zins gilt:

$$F_0 \leq S_0 e^{rT}$$

Futures auf Einkommen generierende Assets (1)

- **Erweiterung: Das entsprechende Wirtschaftsgut generiert laufendes Einkommen (z.B. Dividenden)**
- **wird dieses Einkommen verzinslich angelegt, dann erhöht sich der Profit aus dem Carry Trade und dieser ist bereits bei einem niedrigerem Kurs F_0 des Futures profitabel.**
- **vereinfachend sei eine stetige, kontinuierlich fließende Rendite q angenommen**

Futures auf Einkommen generierende Assets (2)

- **Annahme: Stetige Rendite q wird kontinuierlich in den Zukauf weiterer Güter (z.B. Aktien) reinvestiert**
- **bis zur Fälligkeit erhöht sich die Anzahl der Güter im Portfolio dann um den Faktor e^{qT}**
- **wird antizipierend in $t = 0$ eine entsprechend höhere Anzahl an Futures verkauft, dann ergibt sich ein Profit**

$$p = F_0 e^{qT} - S_0 e^{rT}$$

=> Aus $p \leq 0$ ergibt sich die allgemeine Bewertungsformel:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r-q)T}$$

Lagerkosten

- Unter Umständen generiert das Asset keine Erträge, sondern verursacht Kosten. Rohstoffe verursachen zum Beispiel Lagerkosten.
- Lagerkosten u können als negative Erträge $u = -q$ interpretiert werden, so dass gilt:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T}$$

- die Summe $r + u$ aus Zins- und Lagerkosten wird als Cost of Carry CoC bezeichnet.

1989 – 2004	Lagerkosten (US-\$/Monat)	Lagerkosten p.a. (%)
Rohöl (WTI)	0,40/Barrel	22,05
Heizöl	3,00/Tonne	22,05
Aluminium	7,80/Tonne	6,31
Gold	0,004/Unze	0,01
Weizen	3,33/Bushel	11,91
Mais	2,00/Bushel	9,97

Tabelle 1: Geschätzte Lagerkosten ausgewählter Rohstoffe (1989 – 2004)

Quelle: LEWIS ET AL. (2007), S. 32.

Entnommen aus: [Kern 2010, S. 33 ↑](#)

Elektrizität: Lagerkosten = ?

Lässt sich auch eine Untergrenze für den Futures-Preis ableiten?

- **bisher wurde nur eine Obergrenze für den Futures-Preis abgeleitet (lax formuliert $F_0 \leq S_0 + CoC$)**
- **bei „Full Carry“ entspricht der Futures-Preis genau dieser Obergrenze (also $F_0 = S_0 + CoC$)**
- **es stellt sich die Frage, wann man „ $\leq$ “ durch „ $=$ “ ersetzen kann.**

Futures-Preise beim Crash Oktober 1987

„Trading on Black Monday was chaotic. ... By late afternoon, the S&P 500 Index futures were selling at a 25-point, or 12 percent, discount to the spot market, a spread that previously was considered inconceivable.“

Quelle: Siegel, J.J. (2002): Stocks for the Long Run, S. 266, vgl. auch Hull Business Snapshot 5.4

=> in diesem Fall also $F_0 < S_0$

=> Arbitragemöglichkeit?

Reverse Carry Trades

- Betrachte die Situation $F_0 = 39 < S_0 = 40$ (Backwardation)
- Für langfristig orientierte Investoren wie z.B. Pensionsfonds oder Versicherungen würde es sich lohnen, Aktien zum Kurs von $S_0 = 40$ zu verkaufen, den Erlös verzinslich anzulegen und gleichzeitig den Rückerwerb zu $F_0 = 39$ zu vereinbaren.
- alternativ Verleih der Papiere an einen Hedgefonds für die Laufzeit des Futures-Kontraktes, der dann die entsprechenden Trades durchführt.

- **es handelt sich um „gedeckte“ Leerverkäufe, da sich der Hedgefonds die Aktien vorher physisch geliehen hat. „Nackte“ Leerverkäufe sind rechtlich nicht zulässig.**
- **bei solchen „Reverse“ Carry Trades trennt sich der Investor für die Laufzeit des Futures von dem entsprechenden Wirtschaftsgut, bei gleichzeitigen Rückkauf auf Termin.**
- **es muss die Bereitschaft vorausgesetzt werden, sich vorübergehend von seinen Beständen zu trennen. Dies ist jedoch nicht immer der Fall (siehe nächstes Kapitel).**

Reverse Carry Trade

- Aktienkurs $S_0 = 40 \text{ €}$
- 3-Monats-Future $F_0 = 39 \text{ €}$
- Zins $i = 4\%$ (1% pro Quartal)

Aktion heute ($t = 0$)

- Aktienverkauf zu $S_0 = 40 \text{ €}$
- Verkaufserlös wird verzinslich angelegt
- Kauf eines 3-Monats-Future mit $F_0 = 39 \text{ €}$

Aktion in 3 Monaten ($t = T$)

- Guthaben beträgt $40,40 \text{ €}$ ($40 \text{ €} + 1\%$)
- Future wird fällig, Rückkauf der Aktie zu $F_0 = 39 \text{ €}$

=> Gewinn: $1,40 \text{ €}$

Zwischenergebnis

Annahme: „Reverse“ Carry Trades sind möglich

$F_0 > S_0 e^{rT}$ (super contango) $\Rightarrow$ Carry Trade vorteilhaft

$F_0 < S_0 e^{rT}$ (kein full carry) $\Rightarrow$ „Reverse“ Carry Trade vorteilhaft

$\Rightarrow$ Arbitragefreiheit:

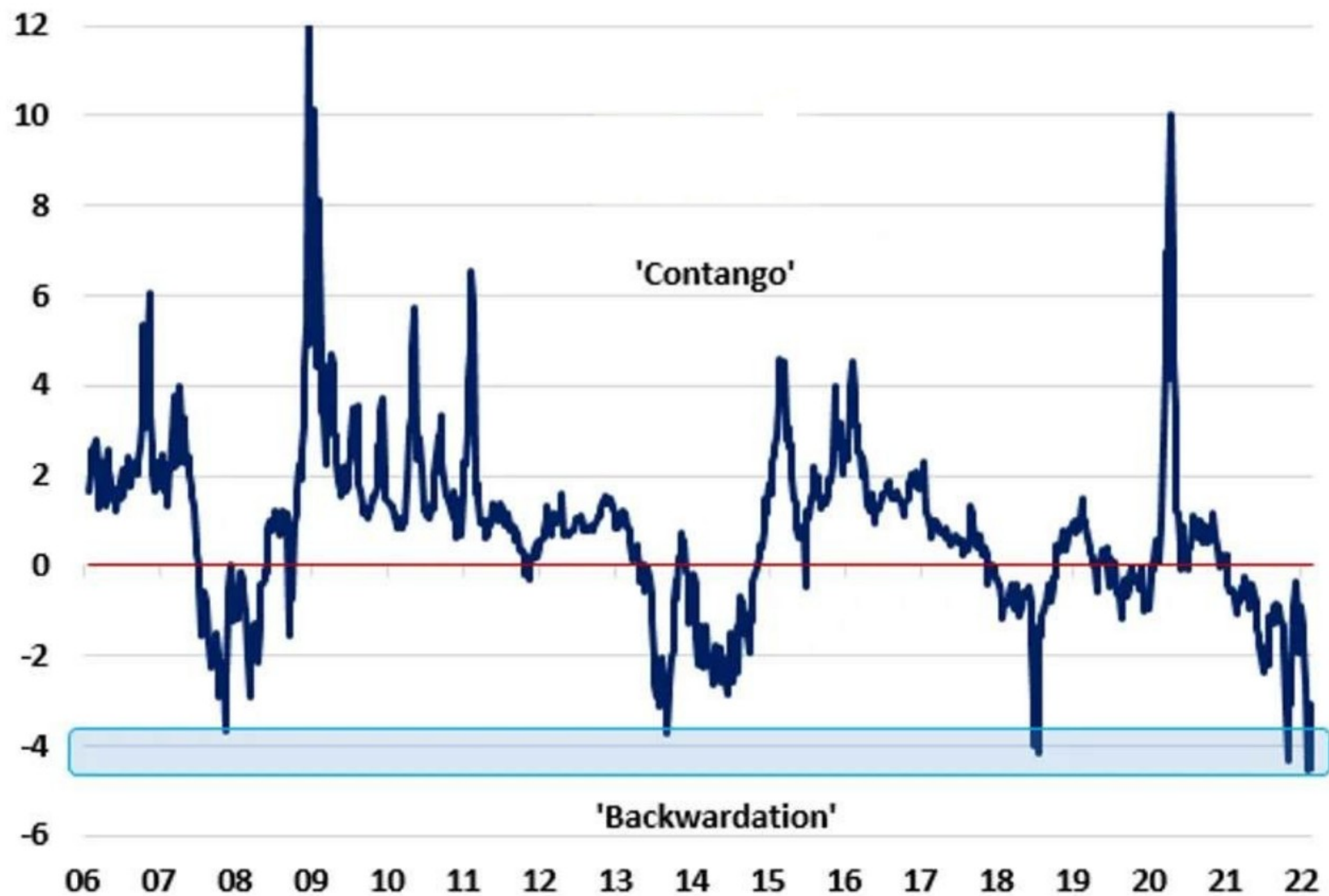
$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Falls das Asset Einkommen q generiert:

$$F_0 = S_0 e^{(r - q)T}$$

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

WTI 6M Term Spread



Erläuterung der Grafik (Rohöl der Sorte WTI)

- **abgebildet ist der zeitliche Verlauf der Differenz (Spread) zwischen 6-Monats-Terminkurs und Spotpreis (bzw. ersatzweise dem nächstfälligen Terminkurs)**
- **positiver Spread bedeutet Contango, negativer Spread Backwardation**
- **„Super“-Contango in 2008/2009 (Finanzkrise) und in 2020 (Corona-Pandemie)**
- **Backwardation ($F_0 < S_0$) tritt regelmäßig auf**

- **Backwardation ($F_0 < S_0$) impliziert $F_0 < S_0 + CoC$.
Also ist $S_0 + CoC$ keine Untergrenze für den Futures-Kurs; der Terminmarkt ist nicht immer in Full-Carry.**
- **Reverse Carry Trade Arbitrage (also Verkauf von Assets bei gleichzeitigem Rückkauf auf Termin) würde zu tendenziell sinkenden Spotpreis und steigenden Futures-Preis führen, bis der Markt wieder in Full Carry ist**
- **Warum keine Reverse Carry Trade Arbitrage?
Warum Lagerhaltung trotz Backwardation?**

Beispiel 1:

- **Annahme: Weizen aktuell knapp und hoher Spotpreis**
- **gleichzeitig werden für die kommende Periode hohe Ernteerträge prognostiziert.**
- **Futures, die erst nach der Ernte fällig werden, werden also niedriger notieren als der aktuelle Spotpreis (Backwardation)**
- **aber keine Arbitrage (= Verkauf mit Rückkaufvereinbarung nach der Ernte), da aktuell sich niemand von seinen Beständen trennen wird. Diese werden vielmehr bis zur Ernte vollständig verbraucht.**

Beispiel 2:

Problematische Hedging-Strategie

- **im Februar liege der Spotpreis für Öl bei $S_0 = 80$ \$ und der September-Future bei $F_0 = 70$ \$ (Backwardation)**
- **eine Ö raffinerie verkauft deshalb ihre Ölvorräte zu 80 \$ bei gleichzeitigen Rückkauf zu 70 \$**
- **falls der Rohstoff vor September (z.B. im April) ungeplant benötigt wird und der Spotpreis dann höher ist, sollen Futures mit Gewinn verkauft werden. Dies soll die höheren Kosten für den Rückkauf ausgleichen.**

	<i>Spotpreis</i>	<i>September-Future</i>
<i>Februar</i>	<i>80 \$</i>	<i>70 \$</i>
<i>April</i>	<i>100 \$</i>	<i>90 \$</i>
<i>September</i>	<i>87 \$</i>	<i>87 \$</i>

- **im April muss die Raffinerie die im Februar für 80 \$ verkauften Vorräte für 100 \$ zurückkaufen.**
- **gleichzeitig werden Futures zum Kurs von 90 \$ verkauft: (Bedeutet wenn bei Fälligkeit im September das Öl aus dem ursprünglichen Kontrakt zum Festpreis von 70 \$ geliefert wird, wird es anschließend direkt zum Terminkurs von 90 \$ wieder verkauft => 20 \$ sicherer Gewinn)**
- **Der Gewinn bei den Futures würde also den höheren Rückkaufpreis vollständig ausgleichen. (Zinsen aus der Anlage des Verkaufserlöses und eingesparte Lagerkosten hier nicht berücksichtigt)**

Abwandlung:

	<i>Spotpreis</i>	<i>September-Future</i>
<i>Februar</i>	<i>80 \$</i>	<i>70 \$</i>
<i>April</i>	<i>100 \$</i>	<i>80 \$</i>
<i>September</i>	<i>87 \$</i>	<i>87 \$</i>

- **in der Abwandlung steigt der September-Future im April nur um 10 \$ auf 80 \$ (→ Samuelson Hypothese)**
- **Folge: Der Gewinn aus dem Verkauf der Futures gleicht den gestiegenen Rückkaufpreis nicht mehr vollständig aus.**
- **In diesem Fall führt der Reverse Carry Trade zu einem Verlust. Es wäre besser gewesen, die Vorräte nicht zu verkaufen → Convenience Yield (Liquiditätsprämie) bei direkten physischen Besitz**

Wann könnte ein solches Szenario eintreten?

- **Beispiel: Im April ist die Ölproduktion wegen eines Kälteeinbruchs / Hurrikans / terroristischen Anschlages unterbrochen. Physisches Öl wird knapp und der Spotpreis steigt auf 100 \$.**
- **Die Marktteilnehmer gehen davon aus, dass die Störung in wenigen Monaten wieder behoben ist. Der Kontrakt mit Liefertermin September steigt daher nicht so stark an wie der aktuelle Spotpreis.**
- **Entscheidend ist, dass die Produktionseinschränkungen nur vorübergehend sind.**

Convenience Yield

- bei nur vorübergehenden Versorgungsengpässen ergibt sich demnach ein Vorteil für den direkten physischen Besitz gegenüber dem Halten eines Futures-Kontraktes
- dieser Vorteil des physischen Besitzes wird als Convenience Yield y (vgl. Kaldor 1939, deutsch: Verfügbarkeits- oder Liquiditätsprämie) bezeichnet (physischer Besitz als „Real-Option“, die bei Engpässen ausgeübt werden kann)

- durch Annahme einer Convenience Yield y als nicht-monetärer Residualgröße kann die Bewertungsformel für Futures als Gleichung formuliert werden:

$$F_0 = S_0 e^{(r + u - y) T}$$

- anders als die Cost of Carry $r + u$ ist die Convenience Yield y nicht direkt messbar und wird nicht in der Gewinn- und Verlustrechnung sichtbar.
- Backwardation tritt auf, wenn die Convenience Yield y größer ist als die Cost of Carry $r + u$. (Warum?)

Investitions- versus Konsumgüter (Hull 5.1; 5.11)..

- *Investitionsgüter* werden für Investitionszwecke dauerhaft gehalten (z.B. Wertpapiere, Fremdwährung, Gold etc.).

Reverse Carry Trades sind immer möglich, da ausreichende Bestände vorhanden. Der Markt ist immer in Full Carry.

- *Konsumgüter* werden dagegen im Produktionsprozess verbraucht (z.B. Öl, Weizen). Es kann zu Knappheiten mit sehr geringen Lagerbeständen kommen. Aufgrund einer positiven Convenience Yield kann Backwardation eintreten.

Investitionsgüter

(Wertpapiere, Gold, Bitcoins...)

- ausreichende Bestände,
keine Knappheiten**
- Convenience Yield = 0**
- Backwardation tritt nicht
auf, Märkte in Full Carry**

Konsumgüter

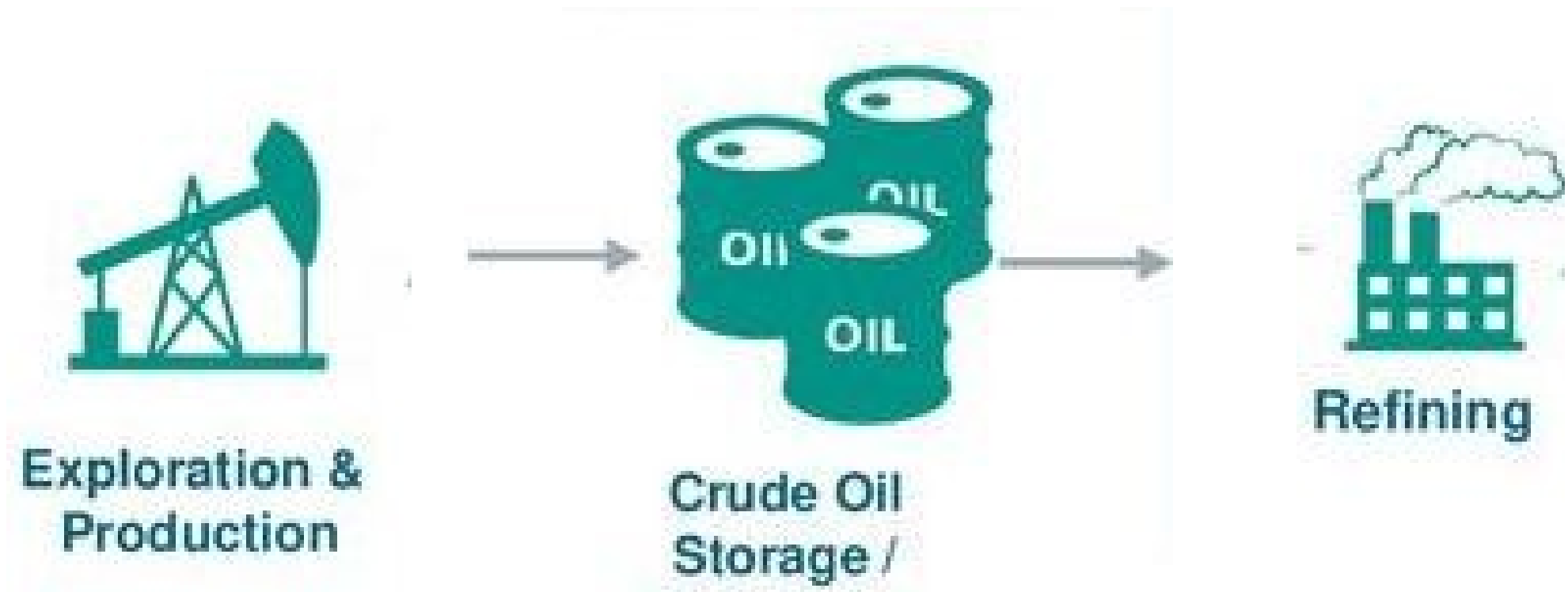
(Weizen, Öl ...)

- temporäre Knappheit
möglich**
- Convenience Yield > 0**
- Backwardation möglich,
da evtl. keine Reverse
Carry Trade Arbitrage**

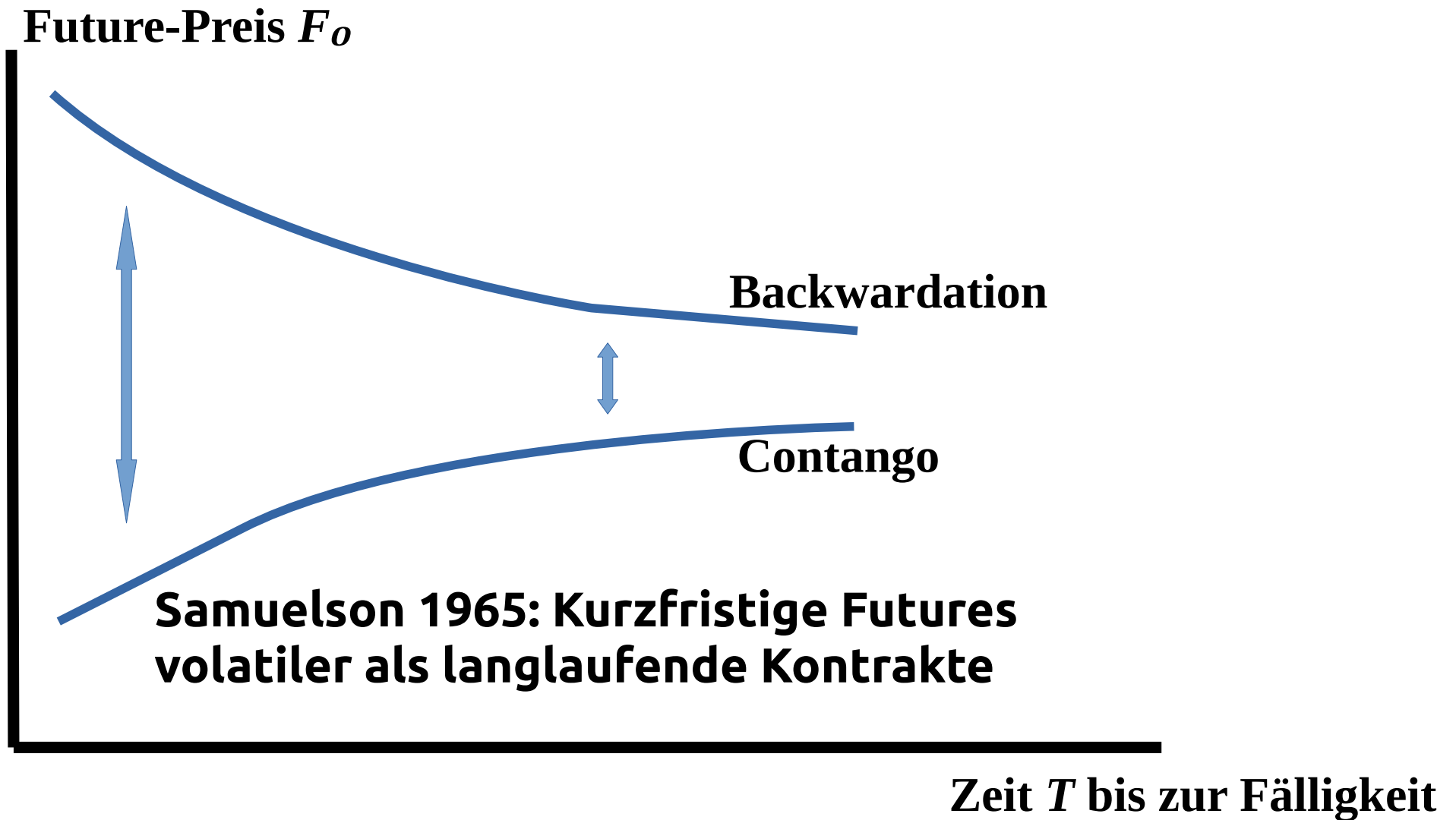
Investitionsgüter (z.B. Gold) werden dauerhaft gelagert



Konsumgüter (z.B. Öl) werden im Produktionsprozess verbraucht



Terminstruktur von Futures im Zeitablauf



Samuelson Hypothese

- **Laut Samuelson (1965) sind kurzfristige Futures volatiler als langlaufende Kontrakte (auch „Maturity Effect“ genannt)**
- **Begründung: Neue Informationen betreffen häufig nur die kurzfristigen Preiserwartungen und sind weniger für die Preisbildung langfristiger Terminkontrakte relevant . (vgl. z.B. die Ausführungen zu Backwardation).**

Samuelson Hypothese und Terminstruktur von Futures

Spotpreis S_0 steigt $\rightarrow$ wegen Samuelson Hypothese steigt der Futures-Preis F_0 weniger stark $\rightarrow$ im Ergebnis häufig Backwardation, also $F_0 < S_0$

Spotpreis S_0 fällt $\rightarrow$ Futures-Preis F_0 fällt weniger stark $\rightarrow$ Ergebnis ist häufig Contango, also $F_0 > S_0$

=> Bei steigenden Kursen wird man also häufig Backwardation und bei fallenden Kursen Contango beobachten.

2. Optionen

1. Einführung

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Derivate

**Forwards/Futures
(Terminkontrakte)**
zweiseitig verpflichtend

Optionen

einseitig verpflichtend

**Call / Kauf-
option**

**Put / Ver-
kaufsoption**

Optionsgeschäft

$t = 0$ (heute)

A kauft von B für $c = 12$ € eine europäische Kaufoption (Call) mit Basispreis $K = 90$ € und Fälligkeit in 12 Monaten.

$t = T$ (in 12 Monaten)

Je nach Börsenpreis S_T erwirbt A von B den Basiswert für $K = 90$ € oder lässt die Option wertlos verfallen.

Optionswert = Innerer Wert + Zeitwert

Innerer Wert (Wert bei sofortiger Ausübung):

$= \max(S_T - K, 0)$ für Kaufoption (Call)

$= \max(K - S_T, 0)$ für Verkaufsoption (Put)

Zeitwert = ?

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

- ***Europäische* Option:** Kann nur bei Endfälligkeit ausgeübt werden.
- ***Amerikanische* Option:** Kann jederzeit während der Laufzeit ausgeübt werden.

=> Wann lohnt sich die vorzeitige Ausübung einer amerikanischen Option?

Satz: Eine amerikanische Kaufoption auf dividendenlose Aktie sollte nicht vor Fälligkeit ausgeübt werden (Hull 11.5)

- letztlich egal, ob Aktie direkt oder über eine jederzeit ausübbare Option gehalten wird**
- Basispreis möglichst spät zahlen (Zinsvorteil, zumindest falls keine Negativzinsen)**
- Aktienkurs könnte unter Basispreis fallen**

Was gilt wenn die Aktie nach Ausübung verkauft werden soll?

- Marktpreis S_t ist der Preis, den potentielle Käufer bereit sind für die Aktie zu zahlen.**
- solche Käufer würden für die nicht ausgeübte Option den inneren Wert $S_t - K$ zu zahlen bereit sein plus einen gewissen Aufschlag für den Zeitwert.**
- also besser die „lebende“ Option verkaufen als diese auszuüben und anschließend die Aktie zu verkaufen**

Beispiel:

- **Aktienkurs = \$110**
- **Basispreis = \$100**
- **Optionspreis = \$15 (bestehend aus \$10 innerem Wert + \$5 Zeitwert)**
- **Wenn die Option zum Basispreis ausgeübt und die Aktie anschließend verkauft wird, bekommst man nur \$10 Gewinn, anstatt die Option für \$15 zu verkaufen!**

Amerikanische Kaufoption auf Aktien mit Dividendenzahlungen

- wenn die Aktie Dividenden generiert kann die vorzeitige Ausübung lohnend sein.**
 - Ausübung dann frühestens unmittelbar vor der ersten Dividendenzahlung**
 - Optionsbedingungen können eine Anpassung der Parameter (Basispreis und/oder Kontraktgröße) vorsehen, um die Dividendenzahlung zu neutralisieren (Dividendenschutz, vgl. auch Hull 10.4).**
- Dann wäre trotz Dividendenzahlung eine vorzeitige Ausübung nie opportun.**

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts

- für amerikanische Puts (Verkaufsoptionen) gibt es keine allgemeine Aussage hinsichtlich des optimalen Ausübungszeitpunktes.**
- wenn der Basiswert völlig wertlos geworden ist (mit Null als unterer Preisgrenze, also keine Negativpreise), lohnt sich auf jeden Fall die sofortige Ausübung (warum?)**
- die vorzeitige Ausübung wird sich aber bereits dann lohnen, wenn der Kurs bereits sehr stark unter den Basiswert gefallen ist.**

Vorzeitige Ausübung?

Call

Put

Dividendenzahlung
während der Restlaufzeit?

Keine allgemeine
Aussage möglich

nein

ja

Nie lohnend

Option dividendengeschützt?

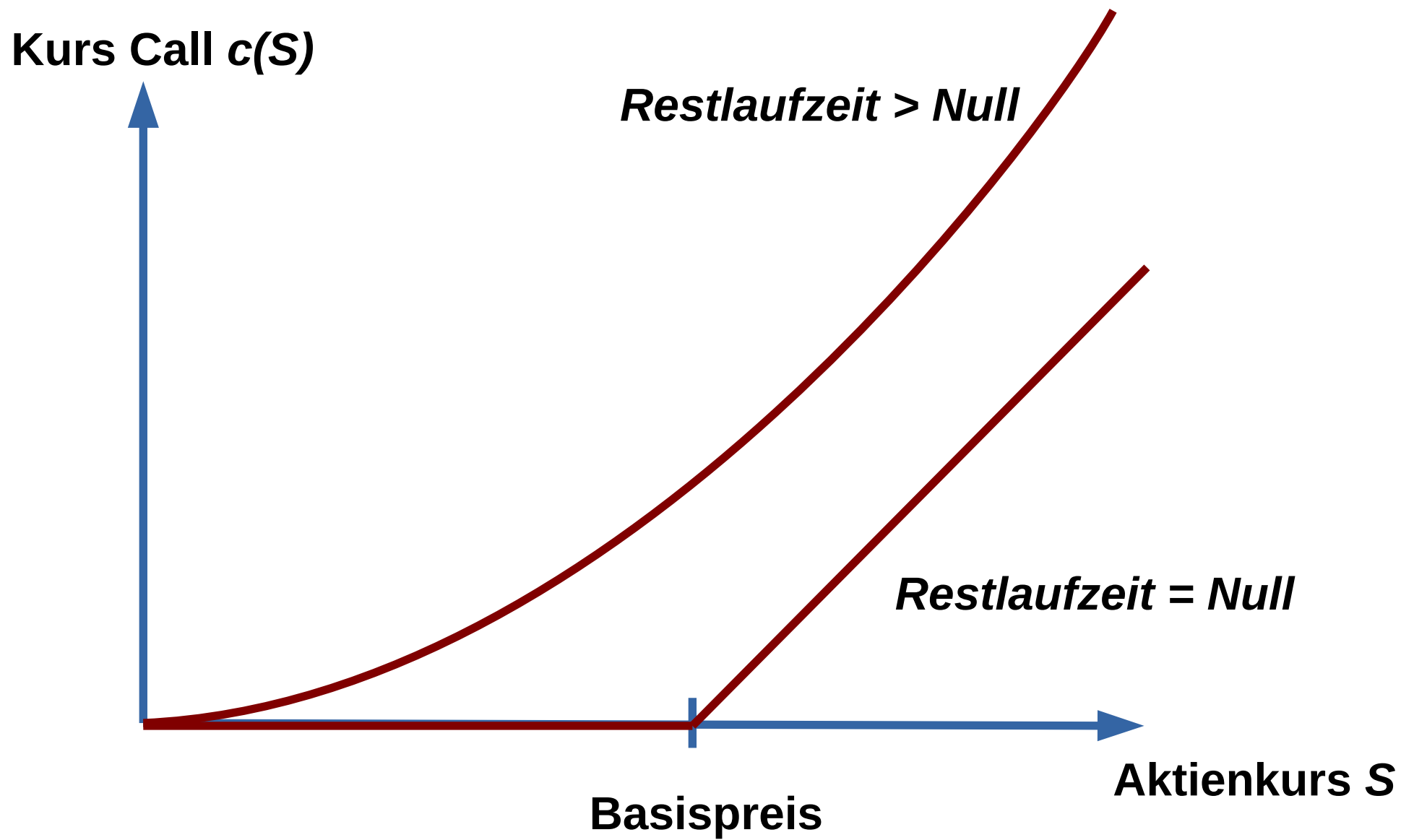
ja

nein

Nie lohnend

Vorzeitige Ausübung
evtl. unmittelbar vor
einem Dividentetermin
lohnend

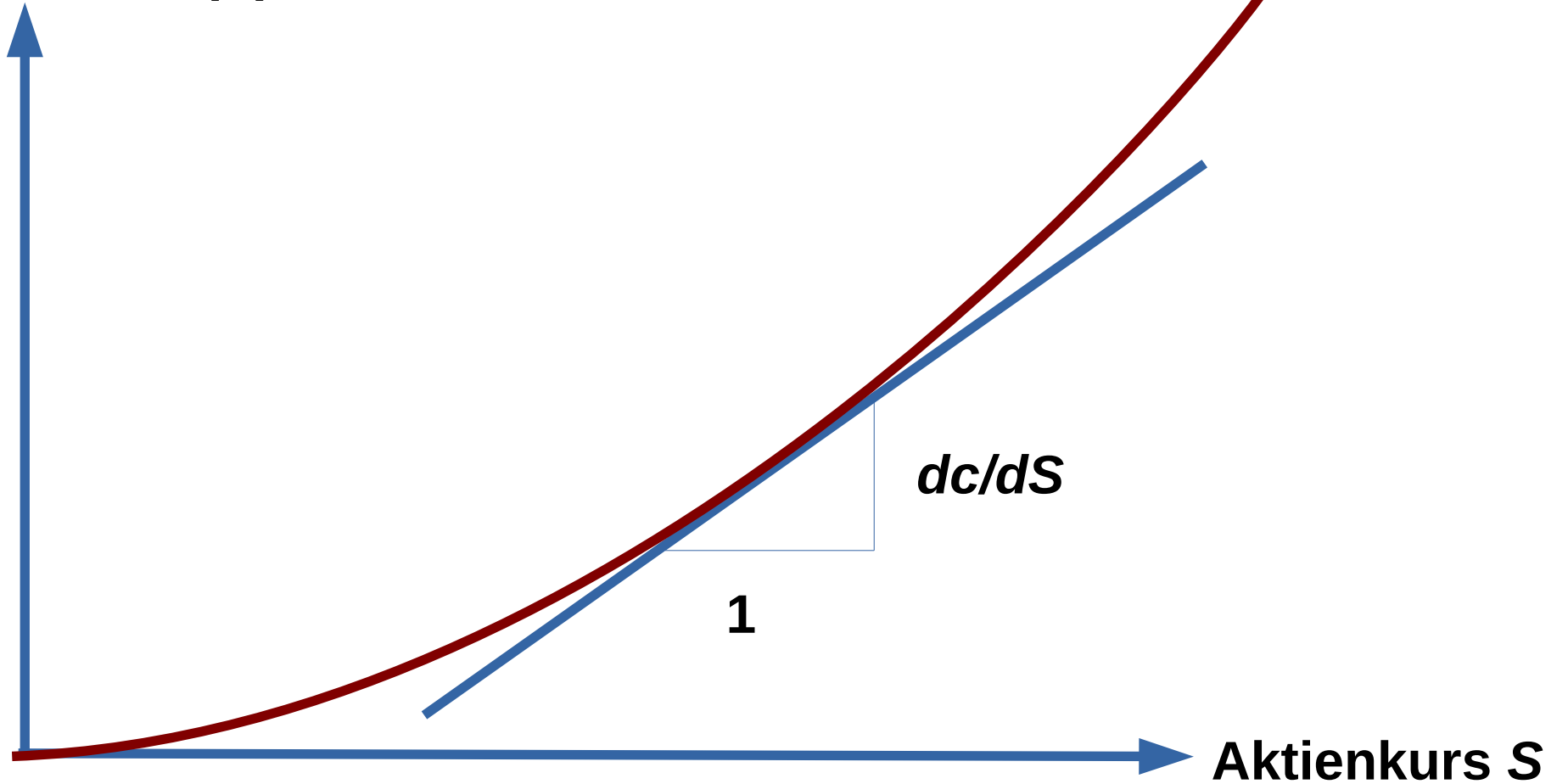
3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung



Delta-Hedging (Hull 19.4)

- Delta ist die erste Ableitung des Optionpreises $c(S)$ nach dem Aktienkurs S : $\Delta = \frac{dc}{dS}$
- wenn der Aktienkurs um 1 € steigt/fällt, dann steigt/fällt der Optionspreis um Delta Δ .
- eine Option hat daher approximativ das gleiche Risiko / Chancenprofil wie ein Portfolio aus Δ Stück Aktien

Kurs Call $c(S)$



Zahlenbeispiel

(Annahmen: Basispreis $K = 90$ €, Restlaufzeit $T = 1$ Jahr, Zins $r = 0,5\%$, Volatilität $\sigma = 15\%$ und Aktienkurs 100 ± 1 €)

Aktienkurs	99 €	100 €	101 €
Optionspreis	11,57 € (-0,78)	12,35 €	13,15 € (+0,80)

Das theoretische Delta beträgt $\Delta = 0,79$ €. Betrachte deshalb folgende Portfolios:

Portfolio A: 79 Aktien

Portfolio B: 100 Optionen

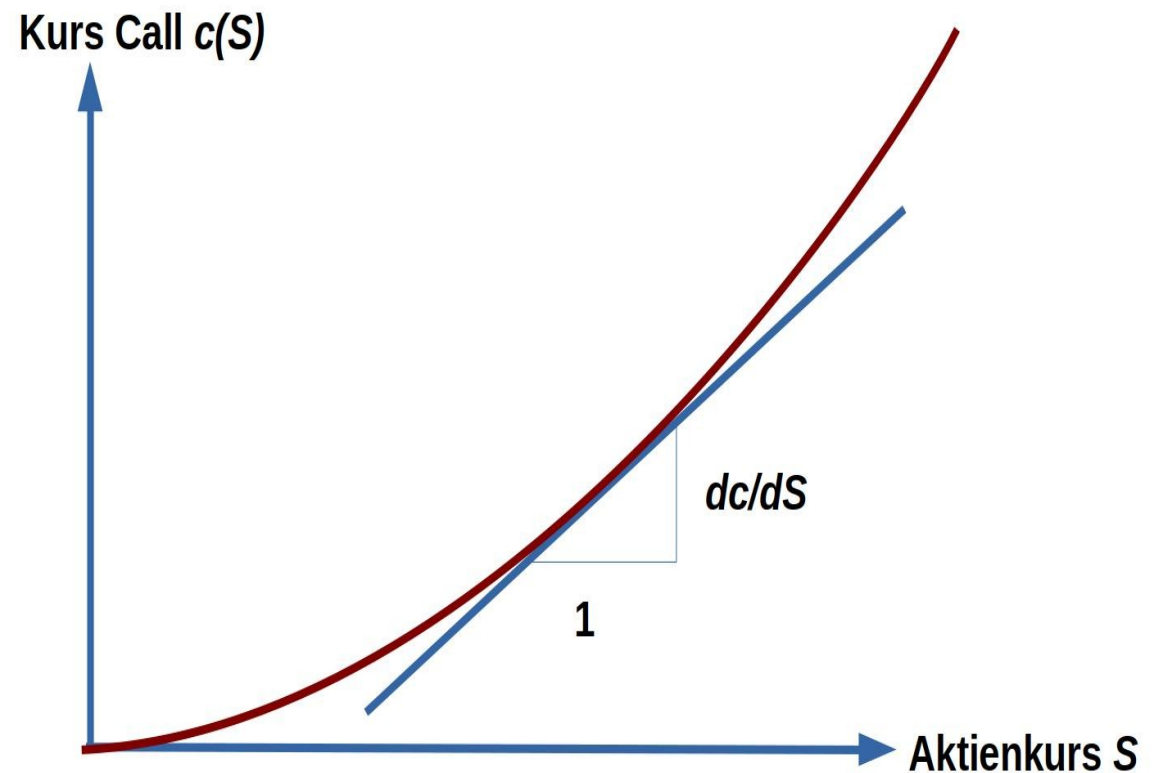
=> Mit beiden Portfolios erzielt man *ungefähr* den gleichen Gewinn / Verlust, wenn der Aktienkurs um ± 1 € schwankt

Diese „Delta“-Approximation ist nicht ganz genau, da der Optionswert ist eine konvexe Funktion des Aktienkurses S ist:

- bei einem Kursrückgang der Aktie von 1 € fällt der Call nur um Delta $\Delta = 78 \text{ Cent}$**
- bei einer Kurssteigerung von 1 € steigt der Call sogar um Delta $\Delta = 80 \text{ Cent}$**

=> Delta-Approximation unterschätzt die Gewinne der Option und überschätzt die Verluste.

Der Optionswert ist keine lineare Funktion des Aktienkurses. Bei sinkenden Kursen verliert die Option weniger an Wert und gewinnt bei steigenden Kursen mehr an Wert als der Basiswert (Konvexität bzw. Gamma-Effekt)



- Die Option profitiert daher von der Volatilität des Aktienkurses, da der durchschnittliche Optionskurs größer ist als der Optionskurs bei einem Aktienkurs von konstant 100 €:

$$\frac{c(99) + c(101)}{2} = \frac{11,57 + 13,15}{2} = 12,36 > 12,35 = c(100)$$

- diesem Vorteil steht als Nachteil gegenüber, dass der Zeitwert der Option im Zeitverlauf kontinuierlich abnimmt, d.h. $dc/dt < 0$

Dynamisches Delta-Hedging in der Praxis (Hull 19.4)

- eine Bank hat z.B. Call-Optionen auf die OC Oerlikon Aktie an Kunden verkauft. Die Bank fungiert also als Stillhalter.**
- für die Bank negativer Marktwert in Höhe des Optionspreises, der mit steigenden Kursen zunimmt und umgekehrt.**
- um dieses Risiko zu hedgen, wird die Bank für jede Option Δ Stück Aktien kaufen**
- allerdings muss das Hedge-Portfolio kontinuierlich angepasst werden, da das Delta bei steigenden Kursen zunimmt und bei fallenden Kursen abnimmt.**

Dynamisches Delta-Hedging und Volatilität

9. August 2007 (sda/Reuters)

Händler erklärten, der Verkaufsdruck sei von Derivaten auf die Oerlikon-Aktien verstärkt worden. ... Denn wenn die Aktie deutlich unter die Options-Ausübungskurse sinke, sei es nicht mehr notwendig, gleich viele Aktien als Absicherung zu halten. Dies löse eine Abwärtsspirale aus.

9. November 2007 (Neue Zürcher Zeitung)

Im SLI setzten die Titel von OC Oerlikon ... ihren seit drei Tagen andauernden Aufwärtstrend fort. ... Ein Analyst merkte an, es müssten Positionen aufgebaut werden, um Optionen zu hedgen.

**Erwartungswert des Optionspreises:
Approximation durch Taylor-Entwicklung 2. Grades
(vgl. entsprechend auch Itô's Lemma)**

$$E\{c[S(1 \pm \varepsilon)]\} = c(S) \pm \underbrace{E(\varepsilon) S \frac{dc}{dS}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} E(\varepsilon^2) S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}_{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}$$

**Zufällige Rendite ε
mit $E(\varepsilon) = 0$**



**Vorteilhaftigkeitsvergleich für das Halten der Option versus
des Haltens des Delta-Hedge-Portfolios aus $\Delta = \frac{dc}{dS}$ Stück
Aktien:**

- **Eingesparte Finanzierungskosten:** $r S \frac{dc}{dS}$
- **Finanzierungskosten Option:** $- r c$
- **Kontinuierlicher Wertverlust der Option:** dc/dt
- **Vorteil aus der Konvexität:** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}$

Black-Scholes-Merton Differentialgleichung (Hull 15.6)

Wegen Arbitragefreiheit muss die Summe der Terme gleich Null sein (diese Differentialgleichung gilt für beliebige Derivate):

$$rS \frac{dc}{dS} - rc + \frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2c}{dS^2} = 0$$

vgl. Black 1989, Black/Scholes 1973, Merton 1973

Fisher Black (1938 – 1995)

Nobelpreis 1997:

Myron Scholes (*1941), Robert C. Merton (*1944)

Frühe Wegbereiter:

Louis Bachelier (1870-1946), Vinzenz Bronzin (1872–1970)

Black-Scholes-Merton Bewertungsformel (Hull 15.8)

Speziell für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie mit Auszahlungsprofil $\max(S_T - K, 0)$ ergibt sich eine explizite Lösung der Differentialgleichung:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Dabei ist:

S_0 = Kurs des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$

**$N(x) = P(X < x)$ = kumulative Verteilungsfunktion für eine
standardnormalverteilte Zufallsvariable X**

K = Basispreis bzw. Bezugspreis

r = stetiger Zinssatz

T = Zeit (in Jahren) bis zur Fälligkeit (z.B. $T = 1/4$)

σ = Volatilität des Underlying (z.B. $\sigma = 30\% = 0,3$)

Volatilität σ

- Volatilität einzige Einflussgröße des Optionspreises, die in der Realität nicht direkt beobachtbar ist.
- Modell unterstellt konstante Volatilität, tatsächlich kann sich diese im Zeitablauf ändern (Heteroskedastizität): Z.B. schlagartige Erhöhung der Volatilität zu Beginn der Corona-Pandemie.
- historische Volatilität wird aus Vergangenheitsdaten berechnet; implizite Volatilität wird aus Optionspreisen ermittelt und reflektiert Erwartungen über zukünftige Volatilität (VDAX misst die implizite Volatilität.)
- siehe auch:
<https://www.boerse-frankfurt.de/wissen/handeln/volatilitaet>

Bewertung europäischer/amerikanischer Calls/Puts

Europäischer Call:	Black-Scholes-Merton Formel
Amerikanischer Call:	Gleicher Wert wie europäischer Call, da das Recht auf vorzeitige Ausübung nie ausgeübt wird (zumindest bei einer dividendenlosen Aktie, sonst numerische Verfahren)
Europäischer Put:	Bewertung über Put-Call-Parität
Amerikanischer Put:	Numerische Verfahren

„Greeks“ (Sensitivitätskennzahlen)

„Delta“	1. Ableitung nach dem Aktienkurs S : $\frac{d c}{d S}$
„Gamma“	2. Ableitung nach dem Aktienkurs S : $\frac{d^2 c}{d S^2}$
„Rho“	Ableitung nach dem Zins r : $\frac{d c}{d r}$
„Theta“	Ableitung nach der Zeit t : $\frac{d c}{d t}$
„Vega“	Ableitung nach der Volatilität σ : $\frac{d c}{d \sigma}$

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

Beispiel:	Investition in $t = 0$	Payoff f_d „down“- Szenario	Payoff f_u „up“- Szenario
Aktie:	- 340	300	400
Anlage/Kredit zu 10%:	- 100	110	110
1 Aktie und 273 € Kredit:	- 340 + 273 = - 67	300 - 273*1,1 = 0	400 - 273*1,1 = 100
-1 Aktie (Leerverkauf) u. 364 € Geldanlage:	340 - 364 = - 24	-300 + 364*1,1 = 100	-400 + 364*1,1 = 0
Call mit Basis 350:	?	0	50

Zusammenfassung

Portfolio A: **1 Aktie und 273 € Kredit:**

Investitionssumme: **67 €**

Payoffs: **$f_{down} = 0 \text{ €}$ und $f_{up} = 100 \text{ €}$**

=> 1 € im „up“-Szenario kostet 67 Cent

Portfolio B: **-1 Aktie (Leerverkauf) und Geldanlage 364 €**

Investitionssumme: **24 €**

Payoffs: **$f_{down} = 100 \text{ €}$ und $f_{up} = 0 \text{ €}$**

=> 1 € im „down“-Szenario kostet 24 Cent

- **Gesucht: Preis eines Calls mit Basis 350 €**
- **Der Call erzielt 50 € im „up“-Szenario und 0 € im „down“-Szenario**

$$\Rightarrow \text{Optionspreis } 50 * 0,67 + 0 * 0,24 = \underline{33,5 \text{ €}}$$

- **für ein beliebiges Derivat mit Payoff f_u im „up“-Szenario und f_d im „down“-Szenario gilt folgende allgemeine Bewertungsformel:**

$$f = 0,67 f_u + 0,24 f_d = \frac{0,74 f_u + 0,26 f_d}{1,1}$$

Risikoneutrale Bewertung (Hull 13.2)

- diese allgemeine Bewertungsformel kann als diskontierter Erwartungswert interpretiert werden.**
- die Bewertung kann also so erfolgen, „als ob“ allseitige Risikoneutralität vorliegen würde.**
- beachte, dass über die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten des up- und down-Szenarios keine Annahmen getroffen wurden. Diese müssen also nicht mit $p = 0,74$ und $1 - p = 0,26$ übereinstimmen (außer bei allgemeiner Risikoneutralität)**

Anwendungsbeispiele risikoneutrale Bewertung:

- **Aktie ($f_{up} = 400$ €; $f_{down} = 300$ €):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 400 + 0,26 \cdot 300}{1,1} = 340 \quad \checkmark$$

- **Geldanlage ($f_{up} = 110$ €; $f_{down} = 110$ €):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 110 + 0,26 \cdot 110}{1,1} = 100 \quad \checkmark$$

- **Option ($f_{up} = 50$ €; $f_{down} = 0$ €):**

$$f = \frac{0,74 \cdot 50 + 0,26 \cdot 0}{1,1} = 33,6 \quad \checkmark$$

Allgemeine Bewertungsformel (Berechnung von p , Hull 13.1)

- Aktie steigt von S_0 entweder auf $S_0 u$ oder fällt auf $S_0 d$, wobei $u > 1$ und $d < 1$
- (stetiger) risikoloser Zins r
- dann lautet die allgemeine Bewertungsformel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{rT}} \quad \text{mit} \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Kontrollrechnung für fiktive W-keit p :

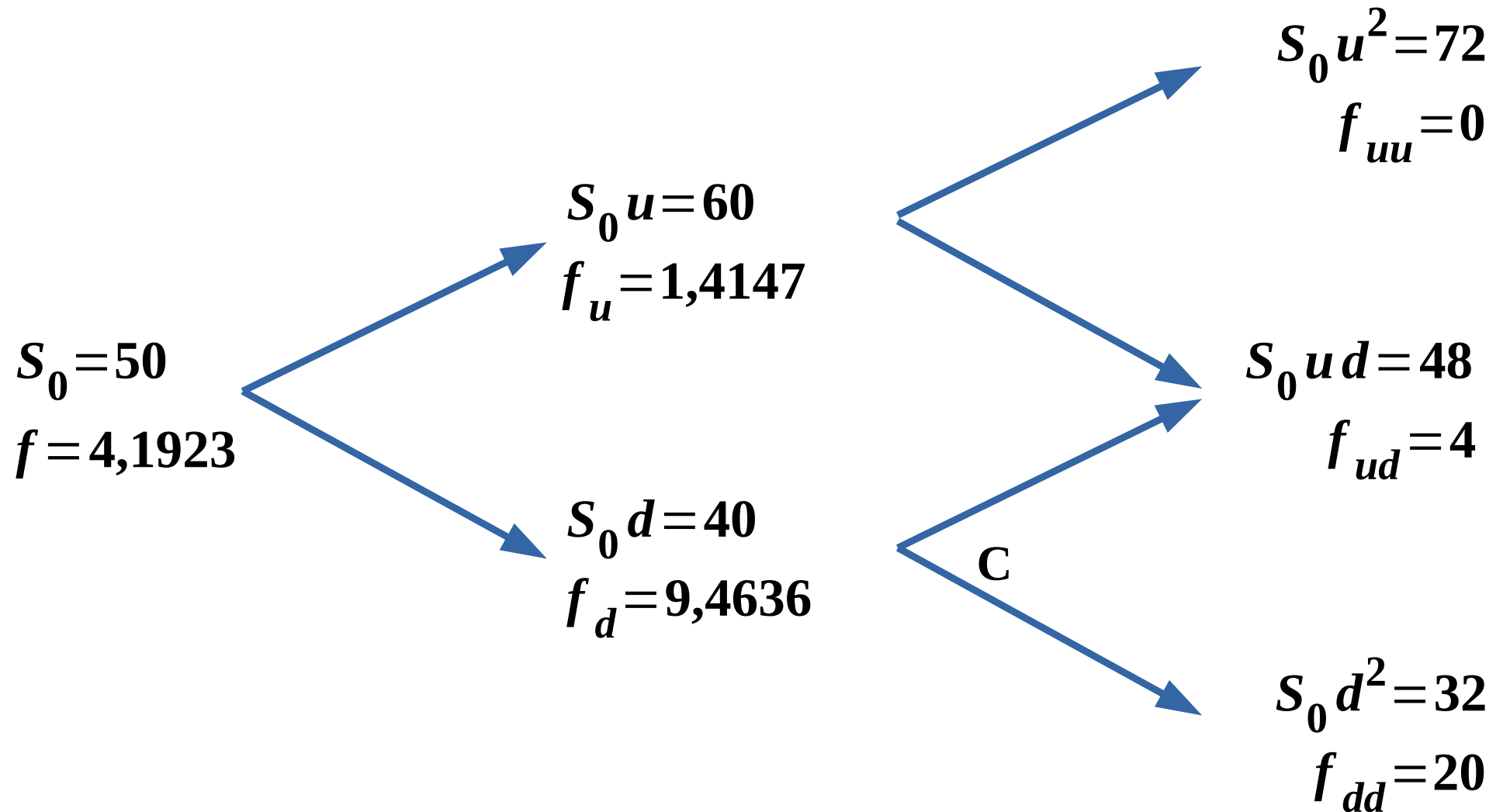
- hier: $S_0 = 340$, $S_0 u = 400$ und $S_0 d = 300$,

also $u = \frac{400}{340}$ und $d = \frac{300}{340}$

Zusammen mit $e^{rT} = 1,1$ ergibt sich:

$$p = \frac{1,1 - \frac{300}{340}}{\frac{400}{340} - \frac{300}{340}} = \frac{1,1 * 340 - 300}{400 - 300} = 0,74$$


Bewertung einer europäischen Put-Option ($K = 52 \text{ €}$)



Bewertung einer europäischen Put-Option (Hull 13.4)

- bewertet wird ein europäischer Put mit Basispreis $K = 52$ € und Restlaufzeit $T = 2$ Jahre**
- der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird in zwei Abschnitte der Länge $\Delta t = 1$ eingeteilt**
- der aktuelle Aktienkurs ist $S_0 = 50$, weiterhin gilt $u = 1,2$ und $d = 0,8$ ($\Rightarrow$ Aktienkurs $\pm 20\%$ je Zeitschritt) und $r = 5\%$**
- in den Endpunkten kann der Wert des Puts unmittelbar aus $\max(52 - S_T, 0)$ berechnet werden.**

- hiervon ausgehend kann sukzessive auch für alle davor liegenden Knotenpunkten der Wert des Puts berechnet werden (Rückwärtsinduktion)

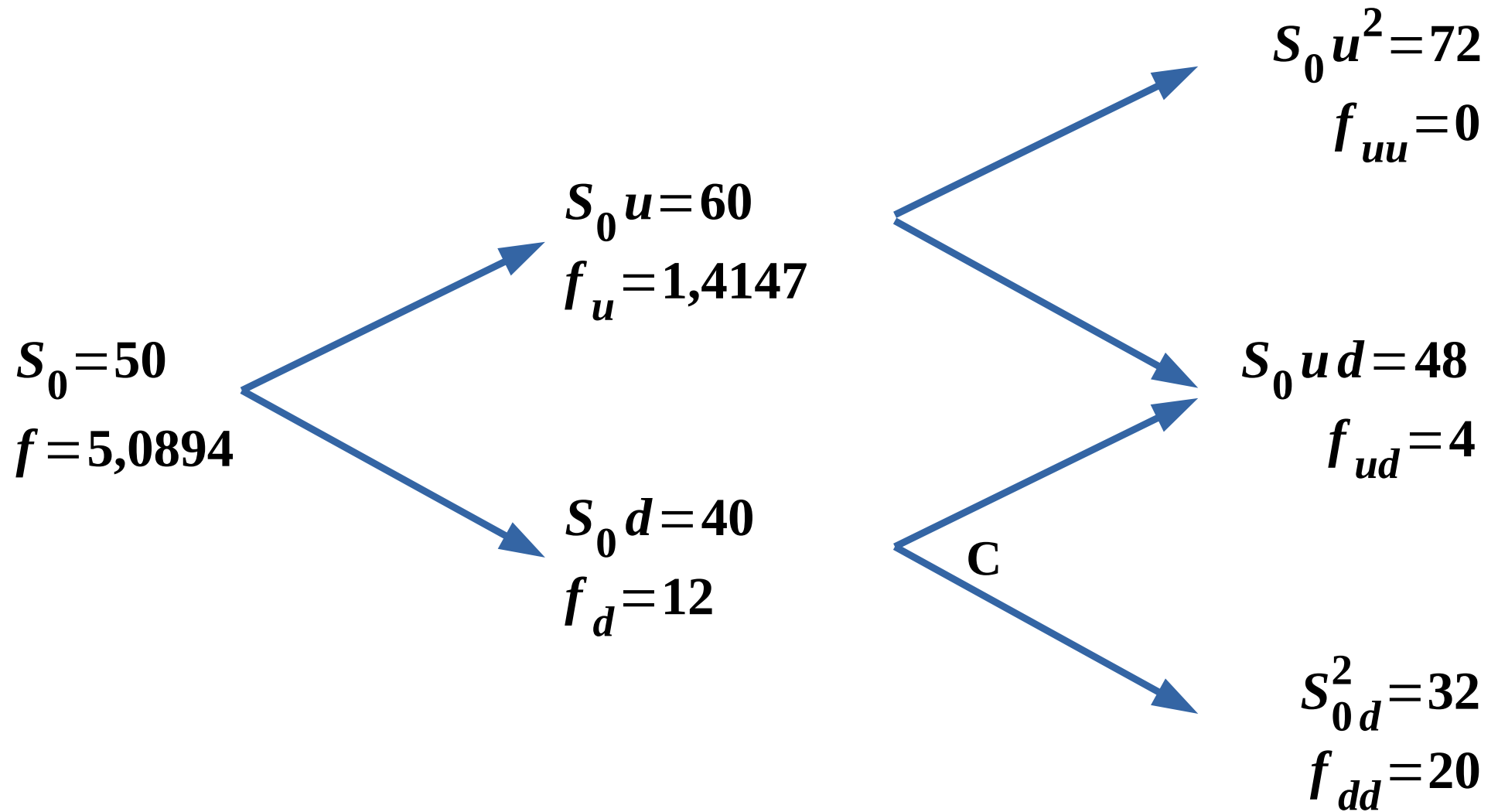
- anzuwenden dabei ist jeweils die Formel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{r\Delta t}} \quad \text{mit: } p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,05 \cdot 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

- z.B. gilt im Knoten C: $\frac{0,6282 \cdot 4 + (1 - 0,6282) \cdot 20}{e^{0,05 \cdot 1}} = 9,4636$

- Endergebnis: Wert des europäischen Puts $f = 4,1923$ €

Abwandlung: Amerikanische Put-Option (Hull 13.5)



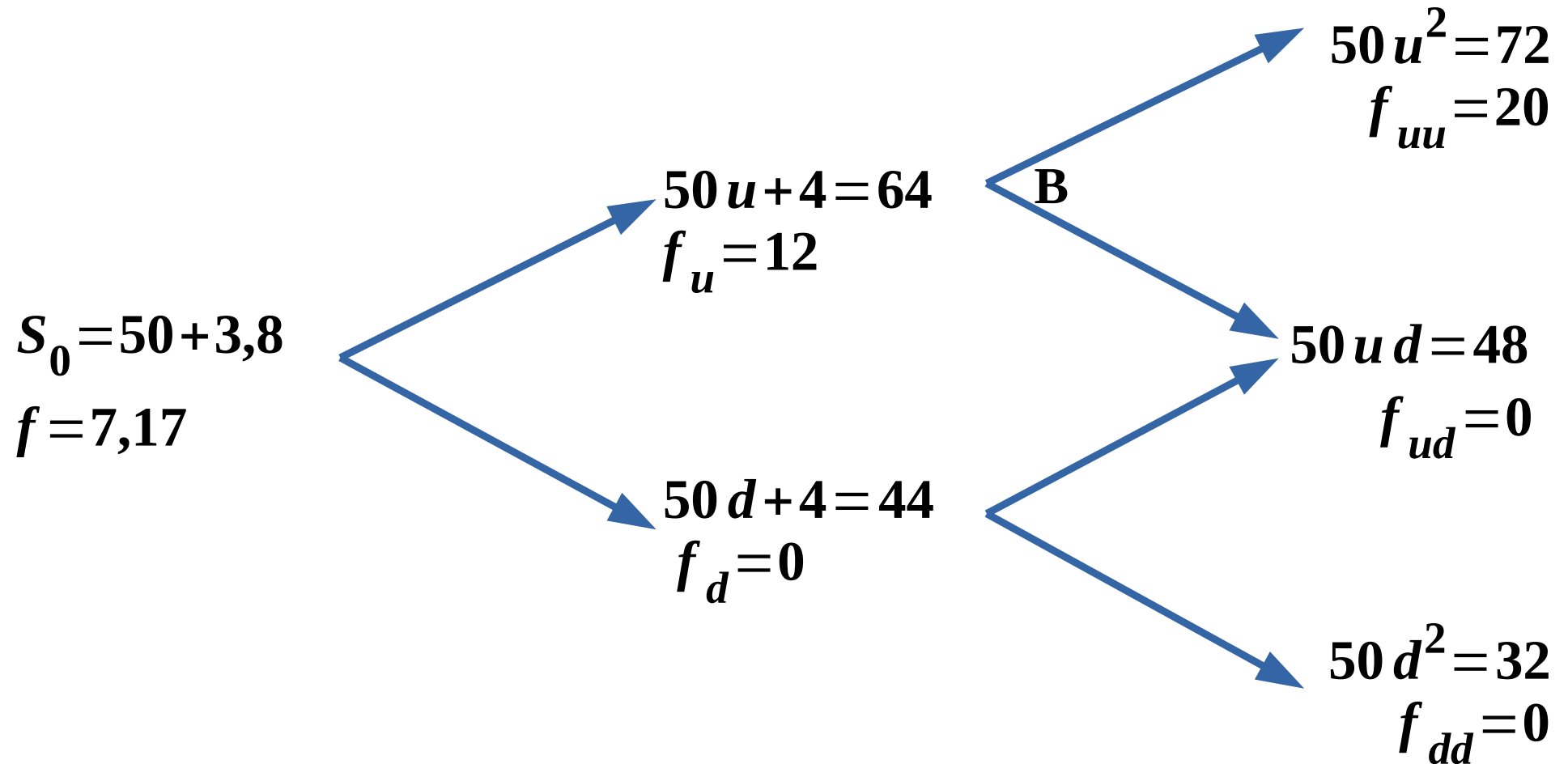
- würde es sich um einen amerikanischen Put handeln, dann muss in jedem Knoten überprüft werden, ob sich eine vorzeitige Ausübung eventuell lohnt.
- dies ist im Knoten C tatsächlich der Fall, da bei Ausübung $\max(52 - 40, 0) = 12$ erzielt werden können, während der Wert einer europäischen Puts in diesem Knoten nur 9,4636 beträgt.
- der Wert eines amerikanischen Puts ist also:

$$f = \frac{0,6282 \cdot 1,4147 + (1 - 0,6282) \cdot 12}{e^{0,05 \cdot 1}} = 5,0894$$

Amerikanischer Call auf dividendenzahlende Aktie (Hull 21.3)

- Betrachtet wird ein amerikanischer Call mit $K = 52 \text{ €}$
- sei $S_0 = 53,8 \text{ €}$ und es sei bekannt dass in $t = 1$ eine Dividende von 4 € gezahlt wird.
- von den $S_0 = 53,8 \text{ €}$ entfallen $4e^{-0,05} = 3,8$ auf die Dividende
- für $S_0^* = 50 \text{ €}$ wird der Zufallsprozess wie oben modelliert
- im Knoten B lohnt sich die vorzeitige Ausübung, weil man sonst auf die Dividende verzichten würde. Der Wert des Calls im Knoten B wäre andernfalls:
$$\frac{0,6282 \cdot 20 + 0}{e^{0,05 \cdot 1}} = 11,95 < 12$$

Amerikanischer Call auf dividendenzahlende Aktie (Hull 21.3)



Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

- der Optionswert kann immer besser approximiert werden, wenn man die Laufzeit in immer mehr Zeitschritte unterteilt.

- damit die Volatilität im Modell mit der tatsächlichen Volatilität σ der Aktie übereinstimmt, ist $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$ zu wählen. (vgl. Cox, Ross, Rubinstein 1979)

(dabei ist bei n Zeitschritten $\Delta t = \frac{T}{n}$, wobei die Restlaufzeit T der Option üblicherweise in Jahren gemessen wird und σ ebenfalls die Volatilität der jährlichen Renditen bezeichnet)

Übergang zum Black-Scholes-Merton-Modell

- im Grenzfall mit unendlich vielen Zeitschritte konvergiert das Modell gegen die bekannte Black/Scholes-Formel
- daher lässt sich der Wert einer Option auch als diskontierter Erwartungswert schreiben (Hull 15.8):

$$c = \frac{E[\max(S_T - K, 0)]}{e^{rT}} \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{E[\max(K - S_T, 0)]}{e^{rT}}$$

Dabei ist S_T log-normalverteilt, d.h. der Logarithmus $\ln(S_T)$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(S_0) + (r - \sigma^2/2)T$ und Varianz $\sigma^2 T$ (Hull, Anhang Kapitel 15)

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

- Zinsswaps**
- Währungsswaps**

Silicon Valley Bank März 2023:

Zweitgrößte Bankpleite in der Geschichte der USA

- **die Bank hatte kurzfristig abrufbare Einlagen
überwiegend in sichere, langlaufende US-Staatsanleihen
investiert („Fristentransformation“)**
- **wegen steigender Zinsen hatten die Anleihen erheblich
an Wert verloren („Zinsänderungsrisiko“)**
- **Verlustmeldung über 1,8 Mrd. \$ löste Bank Run aus**

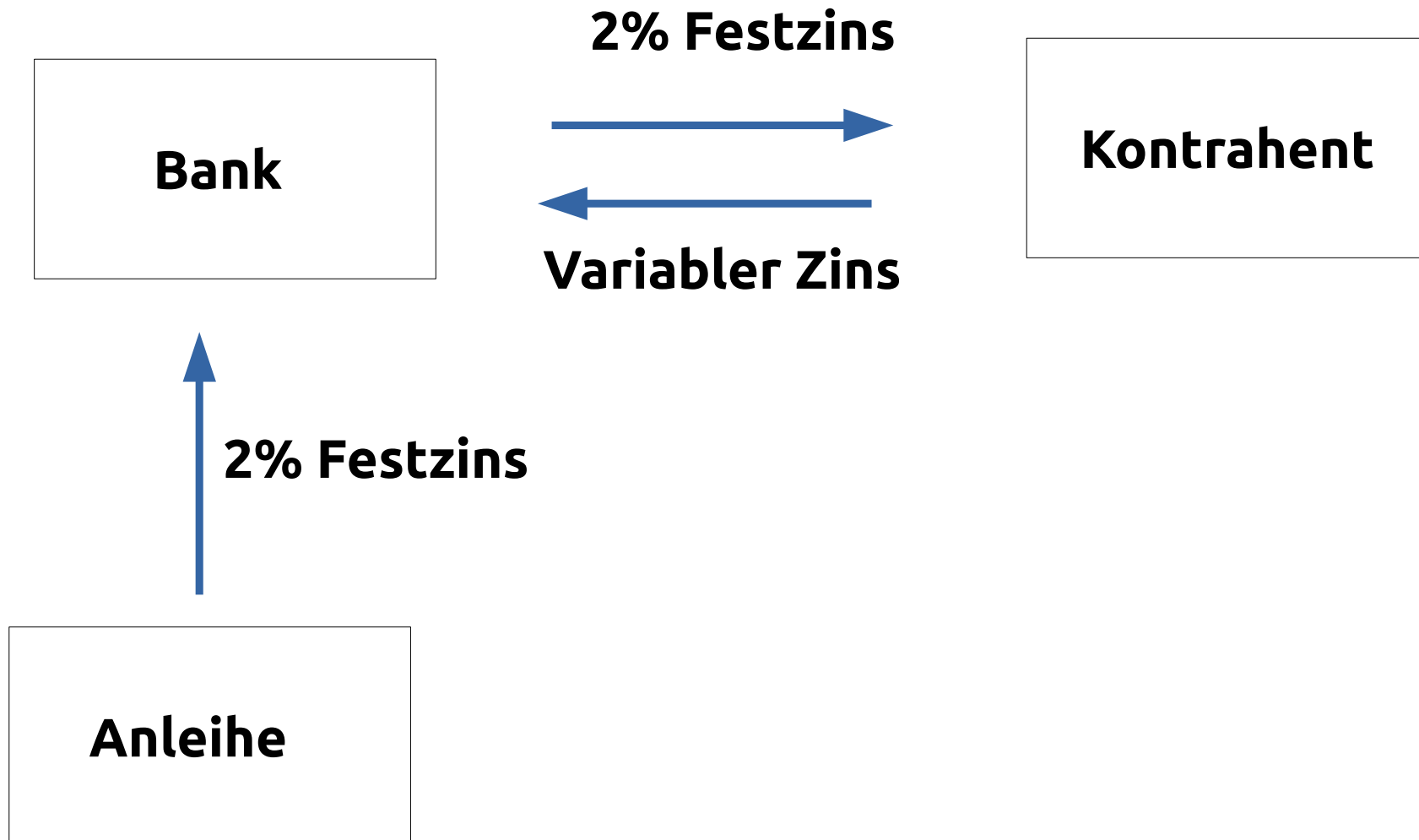
Zinsänderungsrisiken

- **Inverse Beziehung zwischen Zins und Marktwert einer Anleihe: Steigen die Zinsen, fällt der Kurs**
- **denn bei fixen Kupon- und Tilgungszahlungen höhere Rendite nur bei niedrigerem Kurs**
- **Daumenregel: Steigt der Zins um 1%, dann fällt der Kurs einer 10-jährigen Anleihe um etwa 10% (bzw. allgemein grob um *Delta Zins mal Laufzeit* (→ Duration))**

Absicherung mit Zinsswaps

- **tausche (englisch: *to swap*) fixe gegen variable Zinszahlungen**
- **bei einem Zinsanstieg steigt die variable Auszahlung aus dem Swap-Vertrag massiv an, während die feste Verpflichtung gleich bleibt**
- **dadurch werden die Kursverluste der Anleihe vollständig ausgeglichen, da man im Ergebnis durch die variable Verzinsung immer den marktüblichen Zins erhält.**

Management von Zinsänderungsrisiken mit Zinsswaps



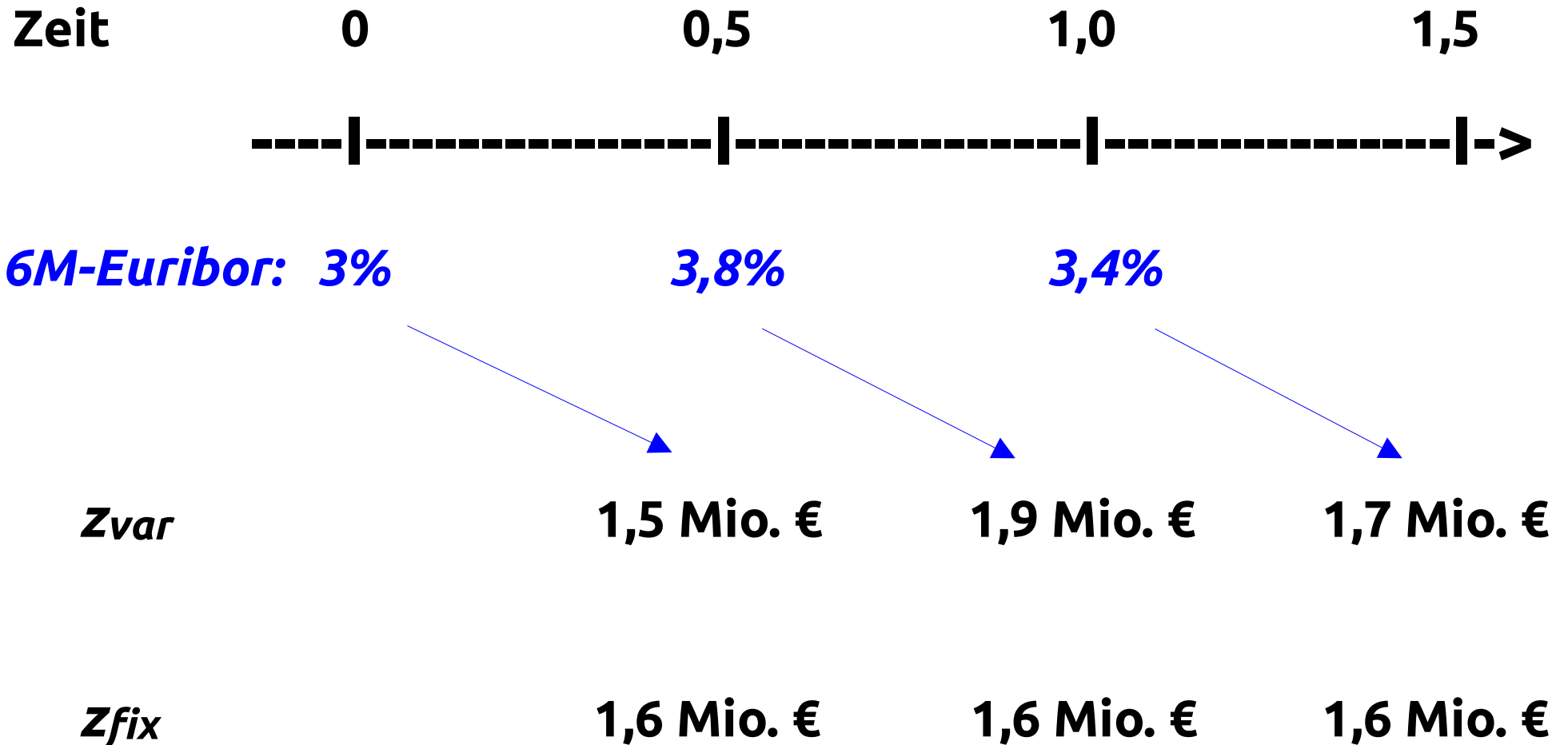
Parameter eines „plain vanilla“ Zinsswaps

- ***Nominalbetrag*** (Notional Amount) N : Der Betrag, auf den sich die Zinszahlungen beziehen (z.B. 100 Mio. €)
- ***Laufzeit*** (Maturity/Tenor) T , z. B. $T = 5, 10$ oder 30 Jahre
- **Höhe des *festen Zinssatzes*** (Fixed Rate)
- ***Referenzzinssatz*** (Reference Rate): z.B. Euribor, SOFR (statt früher LIBOR), vgl. [Wikipedia ↑](#)
- ***Zahlungsfrequenz*** (z.B. alle 3, 6 oder 12 Monate)

=> zu Beginn einer Zinsperiode wird der für die folgende Periode nachschüssig zu zahlende Zins bestimmt. !

Cash Flow eines Zinsswaps

(100 Mio. € nominal, Referenzzinssatz: 6-Monats-Euribor, fixer Zins: 3,2%)



Bewertung von Zinsswaps (1)

- **bei Vertragsbeginn Marktwert Null für beide Seiten
(sonst käme kein Vertrag zustande)**
- **spätere Zinsänderungen können zu einem positiven oder
negativen Marktwert führen**
- **der Marktwert ergibt sich aus der Differenz der Barwerte
jeweils der fixen und variablen Zinszahlungen**

Bewertung von Zinsswaps (2)

- **um die Berechnung zu vereinfachen, wird so getan als ob bei Laufzeitende auch die Nominalwerte ausgetauscht werden**
- **bewertet werden muss dann die Differenz zwischen einer festverzinslichen Anleihe und einer variabel verzinsten Anleihe (sogenannter Floater), die beide jeweils am Laufzeitende zum Nominalwert (üblicherweise $N = 100$) getilgt werden.**

Bewertung der festverzinslichen Anleihe

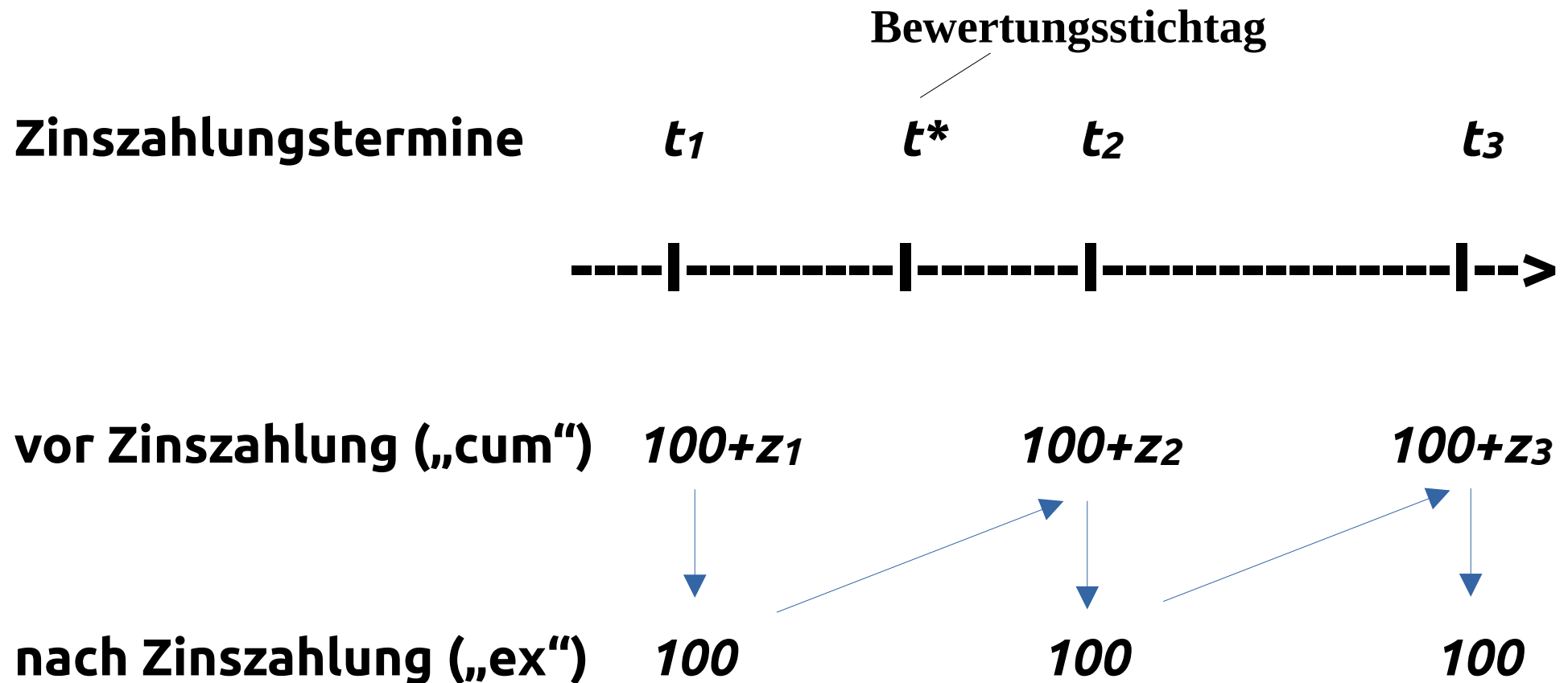
- **Gesucht: Barwert (*Present Value PV*) eines gegebenen Cash Flows zu den Zinssätzen am Bewertungstichtag**
- **Beispiel: Restlaufzeit 15 Monate (= 1,25 Jahre), Frequenz 6 Monate, r_{xM} sind die am Bewertungstichtag gültige Spotrates für eine Laufzeit von x Monaten:**

$$PV_{fix} = \frac{z_{fix}}{(1+r_{3M})^{0,25}} + \frac{z_{fix}}{(1+r_{9M})^{0,75}} + \frac{100+z_{fix}}{(1+r_{15M})^{1,25}}$$

Bewertung der variabel verzinsten Anleihe (1)

- **Grundprinzip: Der ex-Kurs eines Floaters direkt nach einem Zinstermin entspricht immer dem Nominalwert, da die Anleihe von da an immer marktüblich verzinst wird.**
- **eine (kleine) Abweichung kann sich nur ergeben, wenn der Bewertungsstichtag zwischen zwei Zinsterminen liegt und sich das Zinsniveau seit dem letzten Zinstermin geändert hat**

Bewertung der variabel verzinsten Anleihe (2)



Bewertung der variabel verzinsten Anleihe (3)

z^* = am letzten Zinsanpassungstermin festgelegter variabler Zins, der am nächsten Zinszahlungstermin gezahlt wird. Am Bewertungsstichtag t^* bekannt.

t = Zeit (in Jahren) zwischen Bewertungsstichtag t^* und nächsten Zinszahlungstermin

r_t = Zins für diesen Zeitraum

$$PV_{var} = \frac{100 + z^*}{(1 + r_t)^t}$$

Ergebnis

- Marktwert des Payer Swap (Festzinszahler)

$$= PV_{var} - PV_{fix}$$

- Marktwert des Receiver Swap (Festzinsempfänger)

$$= PV_{fix} - PV_{var}$$

Währungsswaps

- **eine Bank in Frankfurt hat ein mit 7% verzinster Darlehen über 100 GBP (British Pounds) vergeben, dass zu pari getilgt wird**
- **mit einem Währungsswap kann die Frankfurter Bank das Währungsrisiko in Britischen Pfund hedgen, indem Zahlungen in Pfund in einen Cash Flow in Euro getauscht werden.**

**Cashflow
aus Kreditvergabe**

**Cashflow
aus Währungsswap**

t = 0	- 100 GBP	+ 100 GBP	- 120 EUR
t = 1	+ 7 GBP	- 7 GBP	+ 6 EUR
t = 2	+ 7 GBP	- 7 GBP	+ 6 EUR
...	...	...	...
t = n	+ 107 GBP	- 107 GBP	+ 126 EUR

=> Währungsswap transformiert Zins- und Tilgungszahlungen in Fremdwährung in Zahlungen in heimischer Währung

Bewertung von Währungsswaps

- **zu vergleichen ist der Barwert eines Cash Flows in Britischen Pfund mit dem Barwert eines Cash Flows in Euro.**
- **Der Barwert des Cash Flows in Euro berechnet sich wie üblich durch Diskontierung**

- **Für den Cash Flows in Britischen Pfund kann zunächst ein Barwert in Pfund berechnet werden (unter Verwendung von Pfund-Zinssätzen), der anschließend mit dem am Bewertungsstichtag gültigen Devisenkurs in Euro umgerechnet wird.**
- **Alternativ kann jede Pfund-Zahlung mit den entsprechenden Terminkursen in Euro umgerechnet werden. Es ergibt sich ein Cash Flow in Euro, für den der Barwert berechnet werden kann.**

Literatur:

- Ahn, D. P. (2018): Principles of commodity economics and finance, MIT Press.
- Black, F., M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy. 81, 3, S. 637–654.
- Black, F. (1989), How We Came up with the Option Formula, The Journal of Portfolio Management, Vol. 15, Winter, S. 4-8.
- Cox, J. C., S. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics. Nr. 7, S. 229–263.
- Hull, J. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate 9. Auflage
- Inhaltsverzeichnis: <http://d-nb.info/1075875099/04↑>)
- Kaldor, N. (1939): Speculation and Economic Stability, in: Review of Economic Studies, vol. 7, issue 1, S. 1-27
- Kern, A. (2010): Commodity Futures - Enhanced Strategien zur Performancesteigerung?
- Lewis, M. (2007): The universe of commodity indices. Commodity Now 11, 40–46.
- Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science. 4, S. 141–183.
- Rau-Bredow, H. (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets online: <https://mpira.ub.uni-muenchen.de/111688>
- Samuelson, P. (1965): Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, 6, 41-49.