Vorlesung „Risikomanagement und Unternehmensfinanzierung“ (2. Teil)

PD Dr. Hans Rau-Bredow

Universität Würzburg

Wintersemester 2019/2020

Gliederung

- Einführung
- Forwards & Futures
- Swaps
- **Optionen**
- **Value-at-Risk**

Zitierte Literatur

- F. Artzner, Delbaen, J. Eber, D. Heath (1999): Coherent Measures of Risk. In: Mathematical Finance. Vol. 9, No. 3, 1999, S. 203–228.
- F. Black, M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy. 81, 3, S. 637–654.
- F. Black (1989), How We Came up with the Option Formula, The Journal of Portfolio Management, Vol. 15, Winter, S. 4-8
- J. C. Cox, S. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics. Nr. 7, S. 229–263.
- R. C. Merton (1973): Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science. 4, S. 141–183.
- H. Rau-Bredow (2019): Bigger Is Not Always Safer: A Critical Analysis of the Subadditivity Assumption for Coherent Risk Measures. In: Risks. 7, Nr. 3, 2019

Optionen

a) Auszahlungsprofil und vorzeitige Ausübung

Auszahlungsprofil von Optionen

Auszahlungsprofil bei Fälligkeit $t = T$ einer Kaufoption (Call) mit Bezugspreis (Basispreis, engl. Strike price) K mit Endpreis S_T des Underlying:

$$max\left(S_T - K, 0\right)$$

Auszahlungsprofil einer Verkaufsoption (Put):

$$max\left(K - S_T, 0\right)$$

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Calls (Hull 11.5)

- amerikanische Optionen können zu jedem Zeitpunkt $t \leq T$, europäische Optionen nur bei Endfälligkeit $t = T$ ausgeübt werden.

=> Es ist nie lohnend, einen amerikanischen Call auf eine dividendenlose Aktie vorzeitig auszuüben!

- Begründung:

    a) Bezugspreis kann bei späterer Ausübung zwischenzeitlich zinsbringend angelegt werden

    b) Vermeidbare Verluste bei Ausübung der Option, wenn der Aktienkurs anschließend unter den Bezugspreis fällt.

<u>Möglicher Einwand</u>: Ein Optionsinhaber glaubt nicht an weitere Kurssteigerungen und möchte deshalb in $t < T$ die Option ausüben und anschließend die bezogene Aktie verkaufen

- **bedeutet, es gibt einen Käufer, der bereit ist den aktuellen Marktpreis S_t für die Aktie zu bezahlen.**

- **dieser Käufer wäre aber aus den erwähnten Gründen bereit, für die Option mindestens $S_t - K$ (= sog. „innerer“ Wert der Option) zuzüglich eines Zeitwertes zu bezahlen.**

- **daher ist es besser eine „lebende“ Option zu verkaufen als diese auszuüben.**

Vorzeitige Ausübung und Dividenden

- Dividende bedeutet Verlagerung von Gesellschaftsvermögen zu den Aktionären

- nach dem Dividendentermin verbrieft die Option nur einen Anspruch auf das um die Dividendenzahlung reduzierte Gesellschaftsvermögen

- es könnte sich daher lohnen, einen amerikanischen Call unmittelbar vor einer Dividendenzahlung vorzeitig auszuüben.

- dies gilt jedoch nicht, wenn durch Anpassung der Optionsbedingungen eine Kompensation für die entgangene Dividende erfolgt (Dividendenschutz)

- in der Praxis erfolgt keine Anpassung der Optionsbedingungen bei regulären Dividenden, sondern nur bei Bezugsrechten oder größeren Sonderdividenden

Dividendenschutz von Optionen

Zwei Vorgehensweisen sind bei der Anpassung von Optionen im Fall von Dividendenzahlungen oder Bezugsrechten denkbar:

- **Der Basispreis wird einfach in Höhe der Dividende / des Bezugsrechtes reduziert ($K_{neu} = K - d$)**
- **Eurex-Methode: Es wird unterstellt, dass die Dividende / das Bezugsrecht zum Zukauf weiterer Aktien verwendet wird und neben dem Basispreis auch die Anzahl der Optionen entsprechend angepasst.**

Dividendenanpassung eines Calls nach der Eurex-Methode:

Aktienkurs:	**100 €**
Dividende:	**20 €**
Basispreis:	**75 €**
Kontraktgröße:	**100 Stück**

=> Dividende kann zum Zukauf von 0,25 Aktien zum Kurs S_{exDiv} = 100 - 20 = 80 € verwendet werden

=> Neue Kontraktgröße: 125 Stück

=> Neuer Basispreis: $K_{neu} = 75\text{ €} * \underbrace{100 / 125}_{= \text{R-Faktor} = 0{,}8} = 60\text{ €}$

Kontrollrechnung für Eurex-Methode

Berechnung des inneren Optionswertes vor und nach der Dividendenzahlung:

Vorher: 100 (S_{cumDiv} – K) = 100 (100 – 75) = 2.500 €

Nachher: 125 (S_{exDiv} – K_{neu}) = 125 (80 – 60) = 2.500 €

Zum Vergleich:

Unveränderte Kontraktgröße und $K_{neu} = K - d$ = *75 – 20 = 55*

ergibt: 100 (S_{exDiv} – K_{neu}) = 100 (80 – 55) = 2.500 €

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts

- Dagegen kann sich auch ohne Dividenden die vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts unter Umständen lohnen:

- **Wenn das Underlying völlig wertlos geworden ist, lohnt sich auf jeden Fall die sofortige Ausübung**
- **Das gleiche gilt aber bereits auch bei einem ausreichend starken Wertverfall, wobei die Vorteilhaftigkeit der vorzeitigen Ausübung im Einzelfall überprüft werden muss.**

Vorzeitige Ausübung?

Call

Dividendenzahlung während der Restlaufzeit?

nein

Nie lohnend

ja

Option dividendengeschützt?

ja

Nie lohnend

nein

Vorzeitige Ausübung evtl. unmittelbar vor einem Dividendentermin lohnend

Put

Keine allgemeine Aussage möglich

b) Put – Call – Parität für europäische Optionen

Put – Call – Parität (Hull 11.4)

- ein Aktienbesitzer kann sich durch Kauf eines Puts vor Kursverlusten schützen
- Aktienbesitzer profitiert dann weiterhin von Kurssteigerungen, während Verluste durch den Bezugspreis K begrenzt sind.
- es ergibt sich folgendes Auszahlungsprofil:

$$S_T + max(K - S_T; 0) = max(K; S_T)$$

- der Käufer eines Calls profitiert ebenfalls voll von allen über den Bezugspreis K hinausgehenden Kurssteigerungen
- Idee: Kombiniere Call und risikolose Geldanlage, so dass sich das gleiche Auszahlungsprofil ergibt wie bei Aktie plus Put.

- Geldanlage in t = 0 von $K(1+i)^{-T}$ bzw. $K e^{-rT}$ ergibt in *t* = *T* Endbetrag K

- Geldanlage plus Call ergibt also folgendes Auszahlungsprofil:

$$K+max(S_T - K; 0) = max(S_T; K)$$

- gleiches Auszahlungsprofil in *t* = *T* bedeutet gleicher Wert in *t* = *0*, daher:

$$c + K e^{-rT} = p + S_0$$ (Put-Call-Parität)

mit c = Wert des Calls in *t* = *0*

p = Wert des Puts in *t* = *0*

c) Delta-Hedging

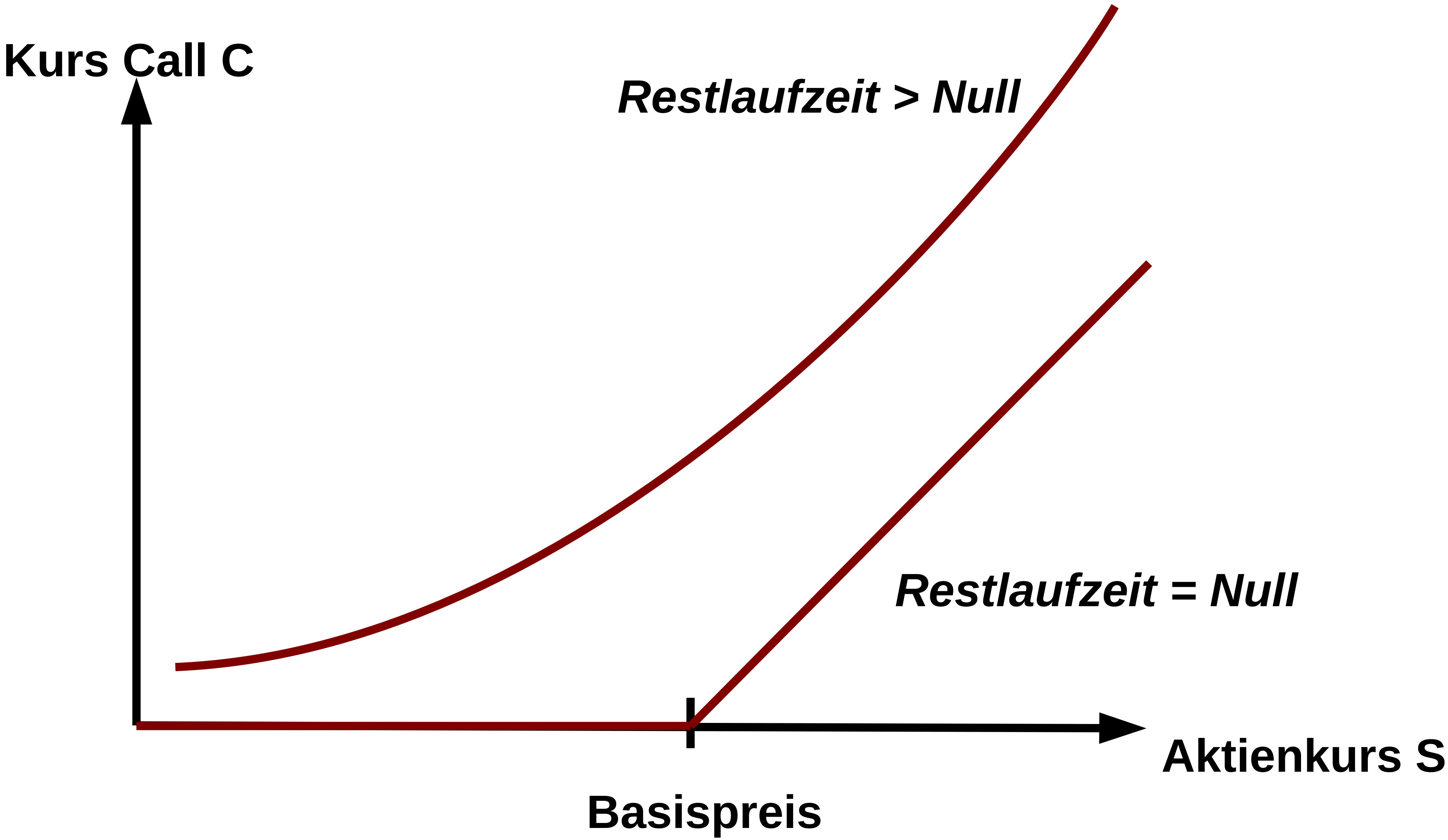
Innerer Wert und Zeitwert einer Option

- der innere Wert einer Option entspricht der bei sofortiger Ausübung sich ergebenden Auszahlung, also $max(S_t - K, 0)$ bei einem Call und $max(K - S_t, 0)$ bei einem Put

- der tatsächliche Wert zum Zeitpunkt $t < T$ liegt aber über dem inneren Wert:

Optionswert = Innerer Wert + Zeitwert

- im folgenden ist der Optionswert $c(S)$ zu einem Zeitpunkt $t < T$ zu bestimmen.

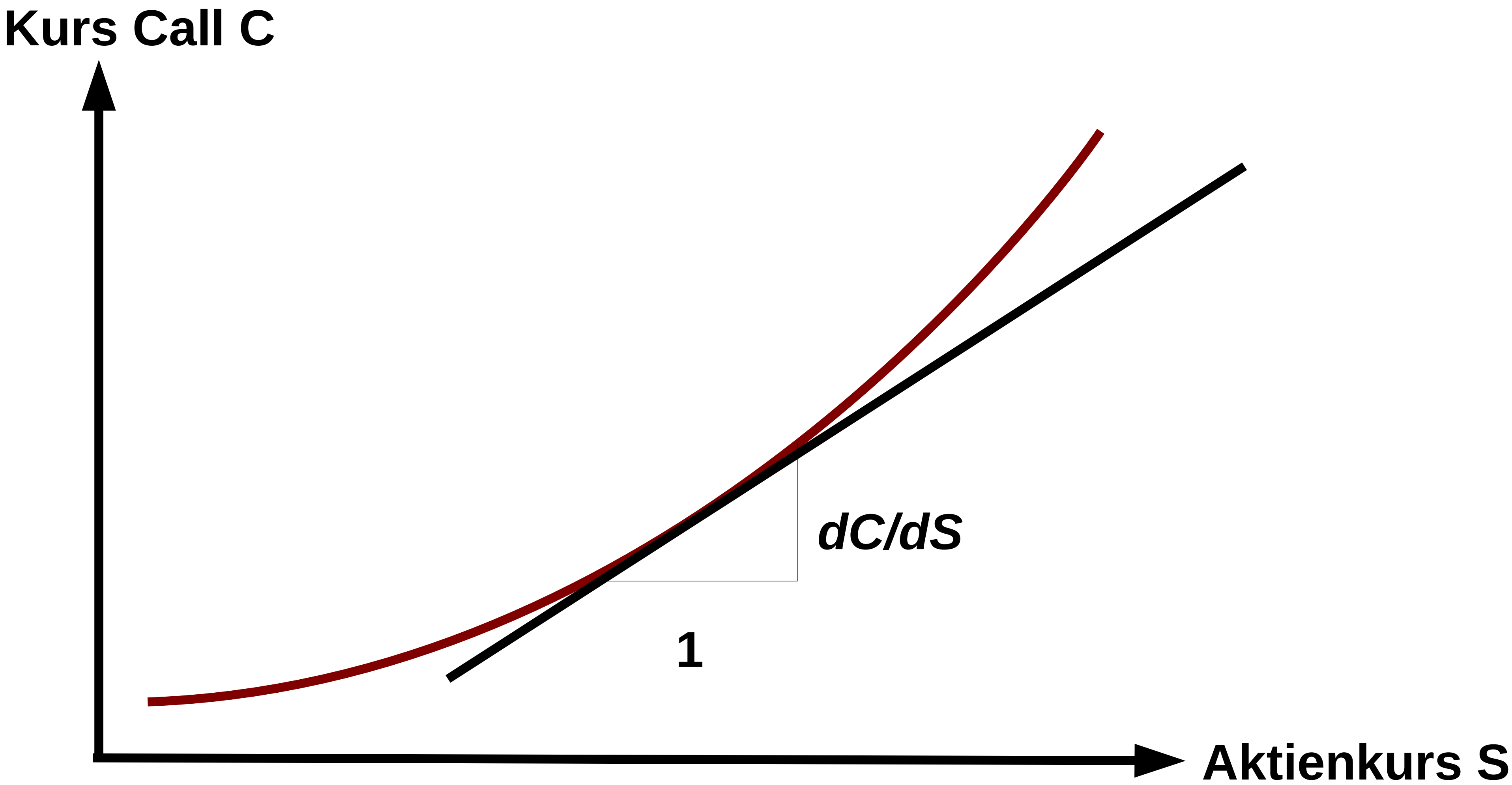

Kurs Call C
Restlaufzeit > Null
Restlaufzeit = Null
Aktienkurs S
Basispreis

Delta-Hedging (Hull 19.4)

- Delta ist die erste Ableitung des Optionpreises *c(S)* nach dem Aktienkurs *S*: $\Delta = \dfrac{dc}{dS}$

- wenn der Aktienkurs um 1 € steigt/fällt, dann steigt/fällt der Optionspreis um Delta Δ **.**

- eine Option hat daher approximativ das gleiche Risiko / Chancenprofil wie ein Portfolio aus Δ **Stück Aktien**


Kurs Call C
dC/dS
1
Aktienkurs S

Betrachte Optionswerte *c(S)* einer Option mit $\Delta = \frac{dc}{dS} = 0{,}79$ bei verschiedenen Ausprägungen von *S*: (Annahmen: Basispreis *K = 90,* Restlaufzeit *T = 1* Jahr, Zins *r = 0,5%* und Volatilität *σ = 15%)*:

Aktienkurs *S:*	**99**		**100**		**101**
		-0,78		**+0,80**	
Optionswert *c(S)*:	**11,57**	←	**12,35**	→	**13,15**

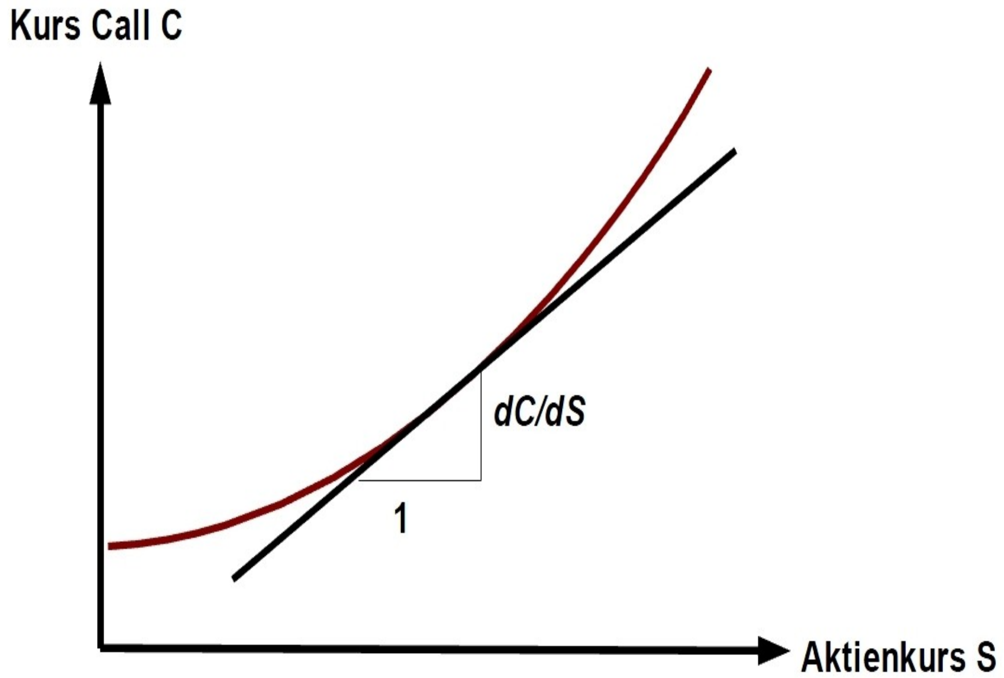
=> Wenn der Kurs um 1 € steigt bzw. fällt, dann erzielt ein Portfolio aus Stück $100\,\Delta$ = 79 Aktien ungefähr denselben Gewinn / Verlust wie ein Portfolio aus 100 Optionen.

- eine solche Delta-Approximation ist ungenau, da der Optionswert ist eine konvexe Funktion des Aktienkurses *S* ist:

> **- bei einem Kursrückgang der Aktie von 1 € fällt der Call nur um 78 Cent**
>
> **- bei einer Kurssteigerung von 1 € steigt der Call sogar um 80 Cent**

- die Delta-Approximation unterschätzt also die Gewinne der Option und überschätzt die Verluste.

Der Optionswert ist keine lineare Funktion des Aktienkurses. Bei sinkenden Kursen verliert die Option weniger an Wert und gewinnt bei steigenden Kursen mehr an Wert als der Basiswert (Konvexität)



Dynamisches Delta-Hedging in der Praxis

- eine Bank hat Call-Optionen auf die OC Oerlikon Aktie an einen Kunden verkauft. Die Bank fungiert also als Stillhalter.

- für die Bank ergibt sich ein negativer Marktwert, der mit steigenden Kursen zunimmt und umgekehrt.

- um dieses Risiko zu hedgen, wird die Bank für jede Option Δ Stück Aktien kaufen

- allerdings muss das Hedge-Portfolio kontinuierlich angepasst werden, da das Delta bei steigenden Kursen zunimmt und bei fallenden Kursen abnimmt.

9. August 2007 (sda/Reuters)

Händler erklärten, der Verkaufsdruck sei von Derivaten auf die Oerlikon-Aktien verstärkt worden. ... Denn wenn die Aktie deutlich unter die Options-Ausübungskurse sinke, sei es nicht mehr notwendig, gleich viele Aktien als Absicherung zu halten. Dies löse eine Abwärtsspirale aus.

9. November 2007 (Neue Zürcher Zeitung)

Im SLI setzten die Titel von OC Oerlikon ... ihren seit drei Tagen andauernden Aufwärtstrend fort. ... Ein Analyst merkte an, es müssten Positionen aufgebaut werden, um Optionen zu hedgen.

d) Black-Scholes-Merton Differentialgleichung

Eine genauere Approximation des Optionspreises *c( )* unter Berücksichtigung der 2. Ableitung d^2c/dS^2 („Gamma") mittels einer Taylor-Entwicklung ergibt für den Erwartungswert *E( )*:

$$E\{c[S(1+\varepsilon)]\} \quad = \quad c(S) \quad + \quad \underbrace{E(\varepsilon)S\frac{dc}{dS}}_{=0} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2}E(\varepsilon^2)S^2\frac{d^2c}{dS^2}}_{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{d^2c}{dS^2}}$$

Zufällige Rendite ε
mit E(ε) = 0

- betrachte hierzu nochmal das Zahlenbeispiel auf Seite 22, wobei $\varepsilon = \pm\, 1\%$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50%:

$$E\left(c\left(S\left(1+\varepsilon\right)\right)\right) = \frac{c\left(99\right)+c\left(101\right)}{2}$$

$$= \frac{11{,}57+13{,}15}{2} = 12{,}36 > 12{,}35 = c\left(100\right)$$

- die Option profitiert von der Volatilität des Aktienkurses, da sich Gewinne und Verluste (anders als bei der Aktie) nicht vollständig gegenseitig aufheben.

- Nachteil bei der Option ist demgegenüber, dass der Zeitwert kontinuierlich abnimmt, d.h. $dc/dt<0$

Vorteilhaftigkeitsvergleich für das Halten der Option versus des Haltens des Delta-Hedge-Portfolios aus $\Delta = \frac{dc}{dS}$ Stück Aktien:

- **Eingesparte Finanzierungskosten:** $r\,S\,\frac{dc}{dS}$
- **Finanzierungskosten Option:** $- r\,c$
- **Kontinuierlicher Wertverlust der Option:** dc/dt
- **Vorteil aus der Konvexität:** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}$

Black-Scholes-Merton Differentialgleichung (Hull 15.6)

Wegen Arbitragefreiheit muss die Summe dieser Terme gleich Null sein:

$$rS\frac{dc}{dS} - rc + \frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2c}{dS^2} = 0$$

vgl. Black 1989, Black/Scholes 1973, Merton 1973

Fisher Black (1938 – 1995)

Nobelpreis 1997:
Myron Scholes (*1941), Robert C. Merton (*1944)

Frühe Wegbereiter:
Louis Bachelier (1870-1946), Vinzenz Bronzin (1872–1970)

Black-Scholes-Merton Bewertungsformel (Hull 15.8)

Für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie mit Auszahlungsprofil $max(S_T - K, 0)$ ergibt sich eine explizite Lösung der Differentialgleichung:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dabei ist:

S_0	=	**Kurs des Underlying zum Bewertungszeitpunkt** $t = 0$
$N(x)$	=	$P(X < x)$ **für eine standardnormalverteilte Zufalls-variable** X **(kumulative Verteilungsfunktion)**
K	=	**Basispreis bzw. Bezugspreis**
r	=	**stetiger Zinssatz**
T	=	**verbleibende Zeit bis zur Fälligkeit der Option**
σ	=	**Volatilität des Underlying (z.B.** $\sigma = 30\% = 0{,}3$**)**

Bewertung europäischer / amerikanischer Calls / Puts

Europäischer Call:	**Black-Scholes-Merton Formel**
Amerikanischer Call:	**Wert entspricht dem eines europäischen Calls, da das Recht auf vorzeitige Ausübung nie ausgeübt wird** (zumindest bei einer dividendenlosen Aktie)
Europäischer Put:	**Bewertung über Put-Call-Parität**
Amerikanischer Put:	**Numerische Verfahren**

„Greeks“ (Sensitivitätskennzahlen)

„Delta“	**1. Ableitung nach dem Aktienkurs *S*:**	$\frac{dC}{dS}$
„Gamma“	**2. Ableitung nach dem Aktienkurs *S*:**	$\frac{d^2C}{dS^2}$
„Theta“	**Ableitung nach der Zeit *t*:**	$\frac{dC}{dt}$
„Vega“	**Ableitung nach der Volatilität σ:**	$\frac{dC}{d\sigma}$
„Rho“	**Ableitung nach dem Zins *r*:**	$\frac{dC}{dr}$

e) Risikoneutrale Bewertung

Beispiel:	Investition in $t = 0$	Payoff f_d „down"-Szenario	Payoff f_u „up"_ Szenario
Aktie:	- 340	300	400
Anlage/Kredit zu 10%:	- 100	110	110
1 Aktie und 273 € Kredit:	- 340 + 273 = - 67	300 - 273*1,1 = 0	400 - 273*1,1 = 100
-1 Aktie (Leerverkauf) u. 364 € Geldanlage:	340 - 364 = - 24	-300 + 364*1,1 = 100	-400 + 364*1,1 = 0
Call mit Basis 350:	?	0	50

Erläuterung:

- durch geschickte Kombination von Aktienkauf und Kreditaufnahme kann ein Portfolio konstruiert werden mit einer Investitionssumme von 67 € und payoff von 0 € im „down“-Szenario und 100 € im „up“-Szenario .

- durch geschickte Kombination von Leerverkauf (zu Leerverkäufen siehe Hull 5.2) und Geldanlage kann ein Portfolio konstruiert werden mit einer Investitionssumme von 24 € und payoff von 100 € im „down“-Szenario und 0 € im „up“-Szenario .

Hieraus lässt sich in arbitragefreien Märkten folgende allgemeine Bewertungsformel ableiten:

$$f = 0{,}67\, f_u + 0{,}24\, f_d = \frac{0{,}74\, f_u + 0{,}26\, f_d}{1{,}1}$$

Aktie:

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 400 + 0{,}26 \cdot 300}{1{,}1} = 340$$

Geldanlage:

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 110 + 0{,}26 \cdot 110}{1{,}1} = 100$$

Option:

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 50 + 0{,}26 \cdot 0}{1{,}1} = 33{,}64$$

Allgemeiner Ansatz (Hull 13.1)

- Aktie steigt von S_0 entweder auf $S_0 u$ oder fällt oder fällt auf $S_0 d$, wobei *u* > 1 und d < 1

- (stetiger) risikoloser Zins: *r*

- dann lautet die allgemeine Bewertungsformel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{rT}} \qquad \text{mit} \qquad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Kontrollrechnung:

- in unserem Beipiel war $S_0 = 340$, $S_0 u = 400$ und

$S_0 d = 300$, also $u = \frac{400}{340}$ und $d = \frac{300}{340}$

Zusammen mit $e^{rT} = 1{,}1$ ergibt sich:

$$p = \frac{1{,}1 - \frac{300}{340}}{\frac{400}{340} - \frac{300}{340}} = \frac{1{,}1 * 340 - 300}{400 - 300} = 0{,}74$$

Risikoneutrale Bewertung (Hull 13.2)

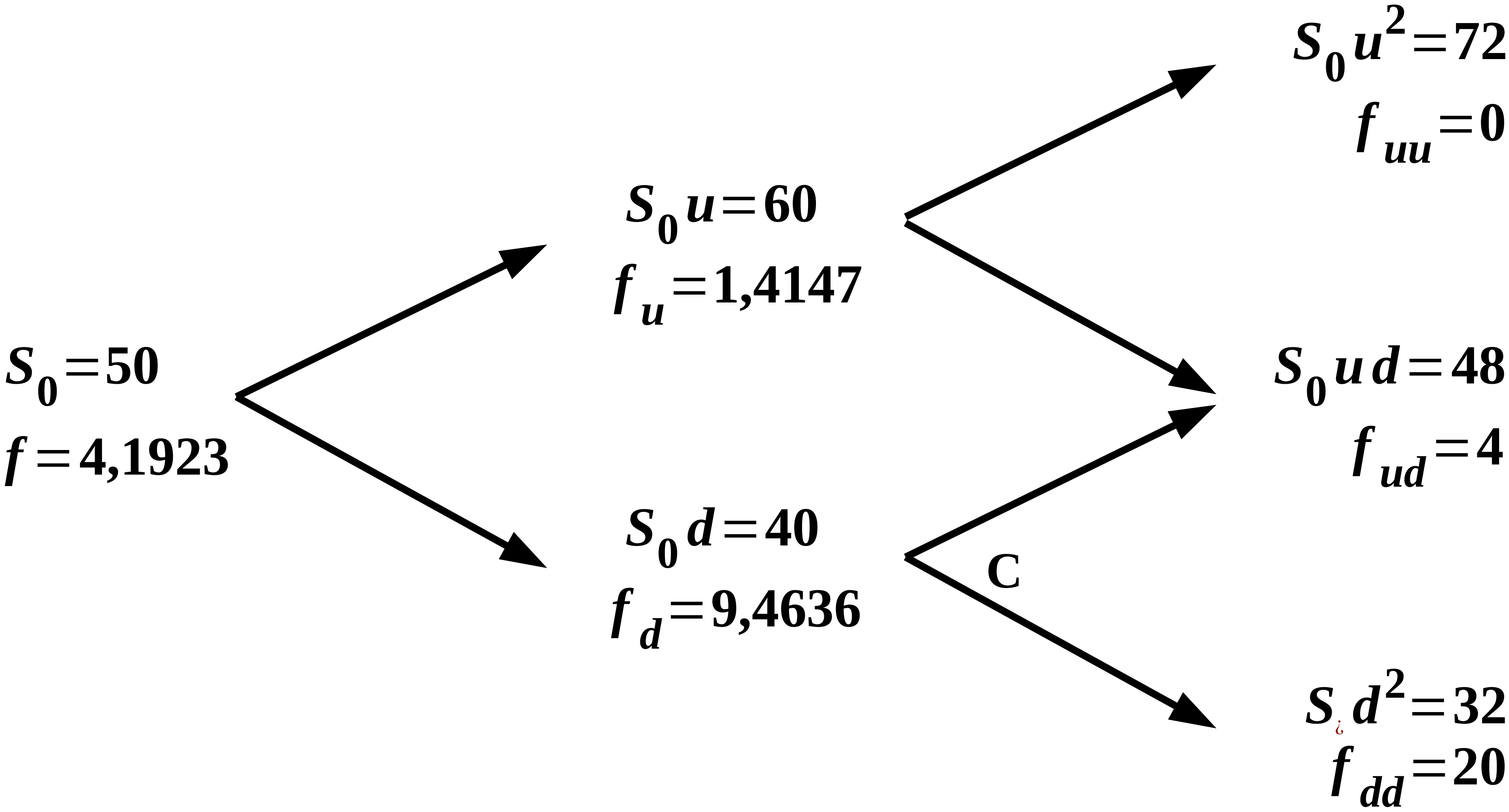
- die allgemeine Bewertungsformel kann als diskontierter Erwartungswert interpretiert werden.

- die Bewertung kann also so erfolgen, „als ob“ allseitige Risikoneutralität vorliegen würde.

- beachte, dass über die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten des up- und down-Szenarios keine Annahmen getroffen wurden. Diese müssen also nicht mit p und $1 - p$ übereinstimmen (außer es liegt allgemeine Risikoneutralität vor)

f) Binomialbäume

Bewertung einer europäischen Put-Option



Bewertung einer europäischen Put-Option (Hull 13.4)

- es soll ein europäischer Put bewertet werden mit Basispreis *K* = 52 € und Restlaufzeit *T* = 2 Jahre

- der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird in zwei Abschnitte der Länge $\Delta t = 1$ eingeteilt

- der aktuelle Aktienkurs ist $S_0 = 50$, weiterhin gilt *u* = 1,2 und *d* = 0,8 (=> Aktienkurs ± 20% je Zeitschritt) und *r* = 5%

- in den Endpunkten kann der Wert des Puts unmittelbar aus $max\left(52 - S_T, 0\right)$ berechnet werden.

- hiervon ausgehend kann sukzessive auch für alle davor liegenden Kontenpunkten der Wert des Puts berechnet werden (Rückwärtsinduktion)

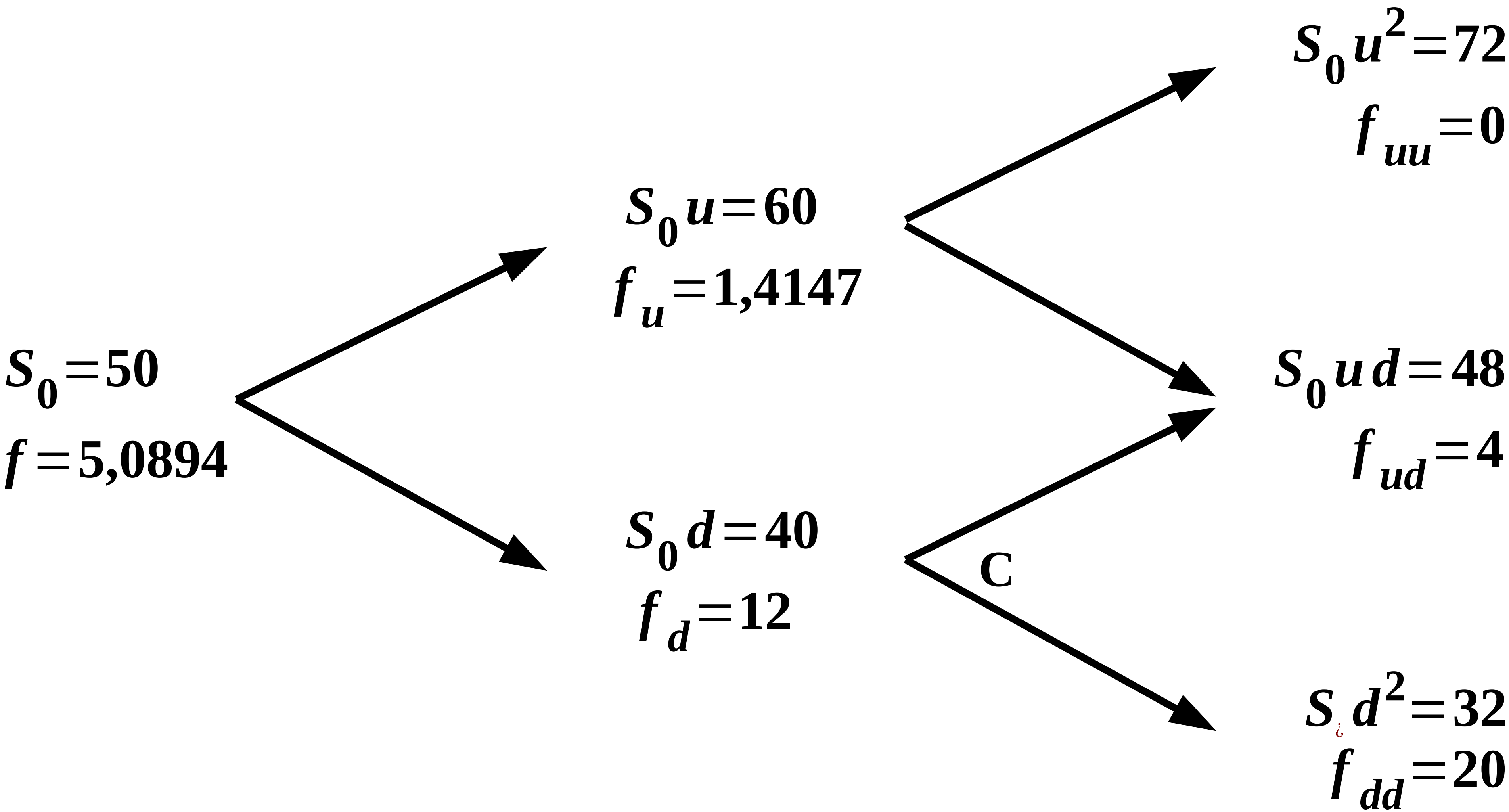
- anzuwenden dabei ist jeweils die Formel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{r\Delta t}} \text{ mit } p = \frac{e^{\Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{0,05} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

- z.B. gilt im Knoten C: $\frac{0,6282 \cdot 4 + (1 - 0,6282) \cdot 20}{e^{0,05 \cdot 1}} = 9,4636$

- Endergebnis: Wert des europäischen Puts *f* = 4,1923 €

Bewertung einer amerikanischen Put-Option



Bewertung einer amerikanischen Put-Option (Hull 13.5)

- im Fall eines amerikanischen Puts muss in jedem Knoten überprüft werden, ob sich eine vorzeitige Ausübung lohnt.

- dies ist im Knoten C tatsächlich der Fall, da bei Ausübung $max(52-40\,,0)=12$ erzielt werden können, während der Wert einer europäischen Puts in diesem Knoten nur 9,4636 beträgt.

- der Wert eines amerikanischen Puts ist also:

$$f = \frac{0{,}6282\cdot 1{,}4147+(1-0{,}6282)\cdot 12}{e^{0{,}05\cdot 1}} = 5{,}0894$$

Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

- die Genauigkeit kann verbessert werden, indem man die Laufzeit der Option in immer mehr Zeitschritte unterteilt.

- damit die Volatilität im Modell mit der tatsächlichen Volatilität *σ* der Aktie übereinstimmt, ist $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ zu wählen. **(vgl. Cox, Ross, Rubinstein 1979)**

(dabei ist bei *n* Zeitschritten $\Delta t=\frac{T}{n}$, wobei die Restlaufzeit *T* der Option üblicherweise in Jahren gemessen wird und *σ* ebenfalls die Volatilität der jährlichen Renditen bezeichnet)

Übergang zum Black-Scholes-Merton-Modell

- wird die Laufzeit der Option in unendlich viele Zeitschritte unterteilt, dann erhält man als Grenzfall die gleiche Lösung wie im Black-Scholes-Merton-Modell

- das bedeutet, dass sich der Wert einer Option als auch diskontierter Erwartungswert schreiben lässt (Hull 15.8):

$$c = \frac{E\left[max\left(S_T - K, 0\right)\right]}{e^{rT}} \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{E\left[max\left(K - S_T, 0\right)\right]}{e^{rT}}$$

Hierbei ist der Logarithmus $\ln\left(S_T\right)$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln\left(S_0\right) + \left(r - \sigma^2/2\right)T$ und Varianz $\sigma^2 T$ (Hull, Anhang Kapitel 15)

Value at Risk (Hull, Kapitel 22)

Value at Risk (VaR)

- Risikokennzahl, entwickelt Anfang der 90er Jahre in der Bank J.P. Morgan (4-15 Report an den CEO Dennis Weatherstone).

- Alle Risiken der Bank aus Geschäften mit Aktien, Anleihe, Währungen etc. sollte zu einer anschaulichen Kennzahl zusammengefasst werden.

- Katastrophale, aber sehr unwahrscheinliche Szenarien bleiben unberücksichtigt

Value at Risk (VaR)

Value at Risk (VaR) mit Konfidenzniveau p% und einem Riskohorizont von N Tagen macht eine Aussage der folgenden Form:

> **Ich bin zu p% sicher, dass nach Ablauf von N Tagen kein größerer Verlust entsteht als der Value at Risk**

Unter bestimmten Bedingungen gilt dabei näherungsweise:

$$VaR_{N\,Tage} = \sqrt{N}\;\; VaR_{1\,Tag}$$

Value at Risk und Normalverteilung

Bei einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ (kein Drift) gilt:

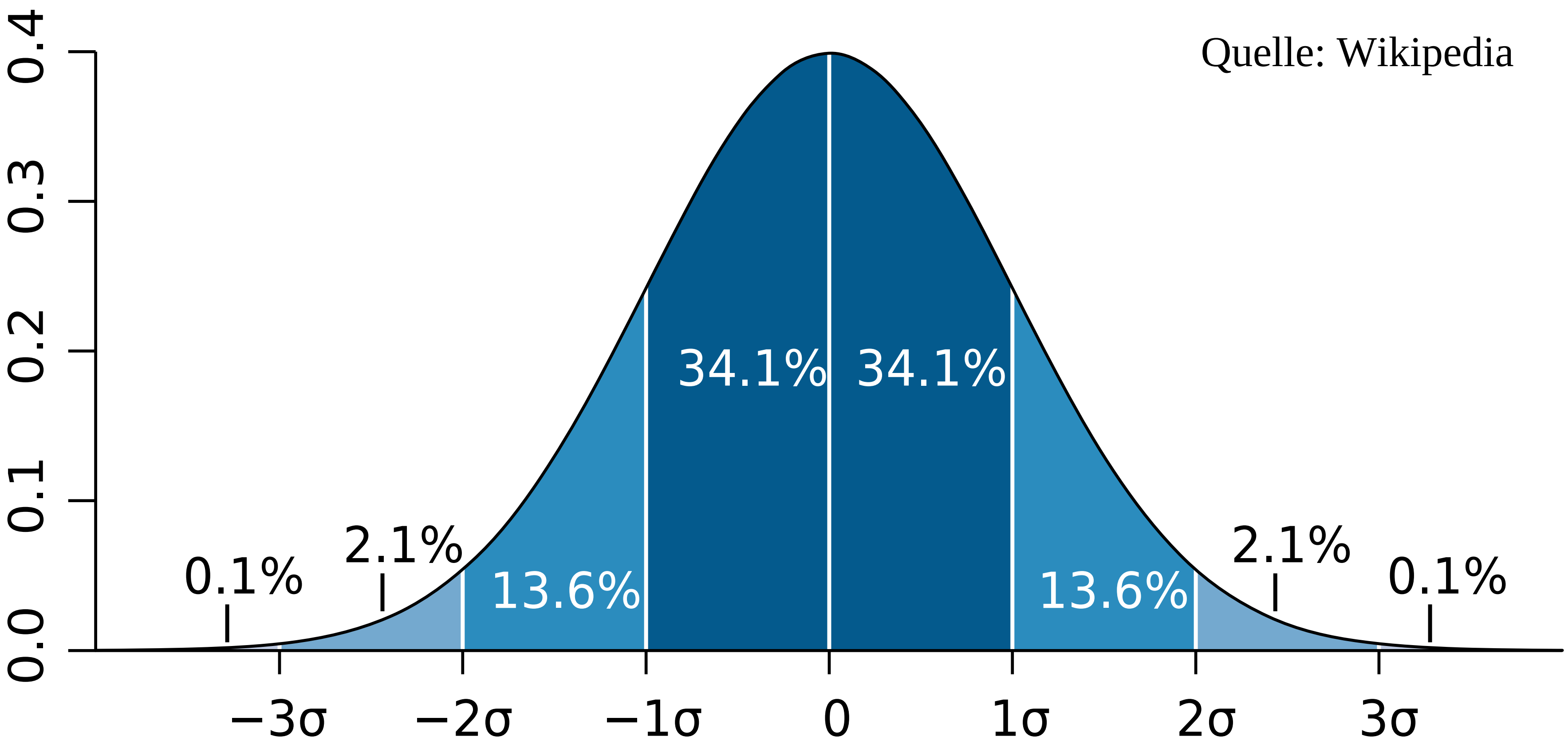
$$VaR_{95\,\%} = 1{,}65\,\sigma$$

$$VaR_{97{,}8\,\%} = 2\,\sigma$$

$$VaR_{99\,\%} = 2{,}33\,\sigma$$

$$VaR_{99{,}9\,\%} = 3\,\sigma$$

$$VaR_{99{,}997\,\%} = 4\,\sigma$$



- **Verlust von mehr als *3σ* hat W-keit von *0,1%***

- **Verlust von mehr als *2σ* hat W-keit von *0,1%* + *2,1%* = *2,2%***

Berechnung von σ (Lineares Modell vgl. Hull 22.4)

Betrachte ein Portfolio aus *n* Assets, wobei α_i den in Asset i investierten Betrag bezeichnet. σ_i ist die Volatilität (Standard-abweichung) von Asset i und ρ_{ij} die Korrelation der Renditen der Assets *i* und *j*. Dann gilt:

$$\sigma^2_{Portfolio} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

Kritik der Normalverteilungshypothese

- für die täglichen Renditen des Dax gilt $\sigma \approx 1\%$

- ein 4σ Ereignis wäre also ein Tagesverlust von ≥ 4%

- die W-keit für ein 4σ Ereignis ist *0,003% ≈ 1 zu 33.000*

- unter der Normalverteilungshypothese wäre also nur alle 33.000 Tage (bei etwa 256 Handelstagen im Jahr alle 130 Jahre) mit einem Tagesverlust von mehr als 4% zu rechnen

- dies zeigt, dass die Normalverteilung die W-keit hoher Verluste deutlich unterschätzt (sog. fat tails)

Weitere Kritikpunkte an der Normalverteilungshypothese:

- **auf Optionen lässt sich der Ansatz nur bei einer linearen Delta-Approximation anwenden, die aber wegen der Konvexität (Gamma) von Optionen zu ungenau ist.**

- **Kreditausfallrisiken sind offensichtlich nicht normalverteilt (binäres Ereignis)**

- **als Alternative bieten sich Simulationsverfahren an:**
    - **Historische Simulation (siehe unten)**
    - **Monte-Carlo-Simulation (Szenarien werden durch Zufallsgenerator aus einer W-keitsverteilung erzeugt)**

Historische Simulation

- identifiziere Risikofaktoren für das Portfolio (z.B. Kurse der Aktien von BMW und RWE)
- ermittle die zufälligen Renditen dieser Aktien für die vergangenen N Tage
- wende diese Renditen auf den aktuellen Kurs an und erzeuge so N Szenarien
- in jedem Szenario muss eine Neubewertung des Portfolios erfolgen (ggf. inklusive Neuberechnung der Optionswerte)
- Ordne die Ergebnisse der Größe nach und bestimme den Value at Risk

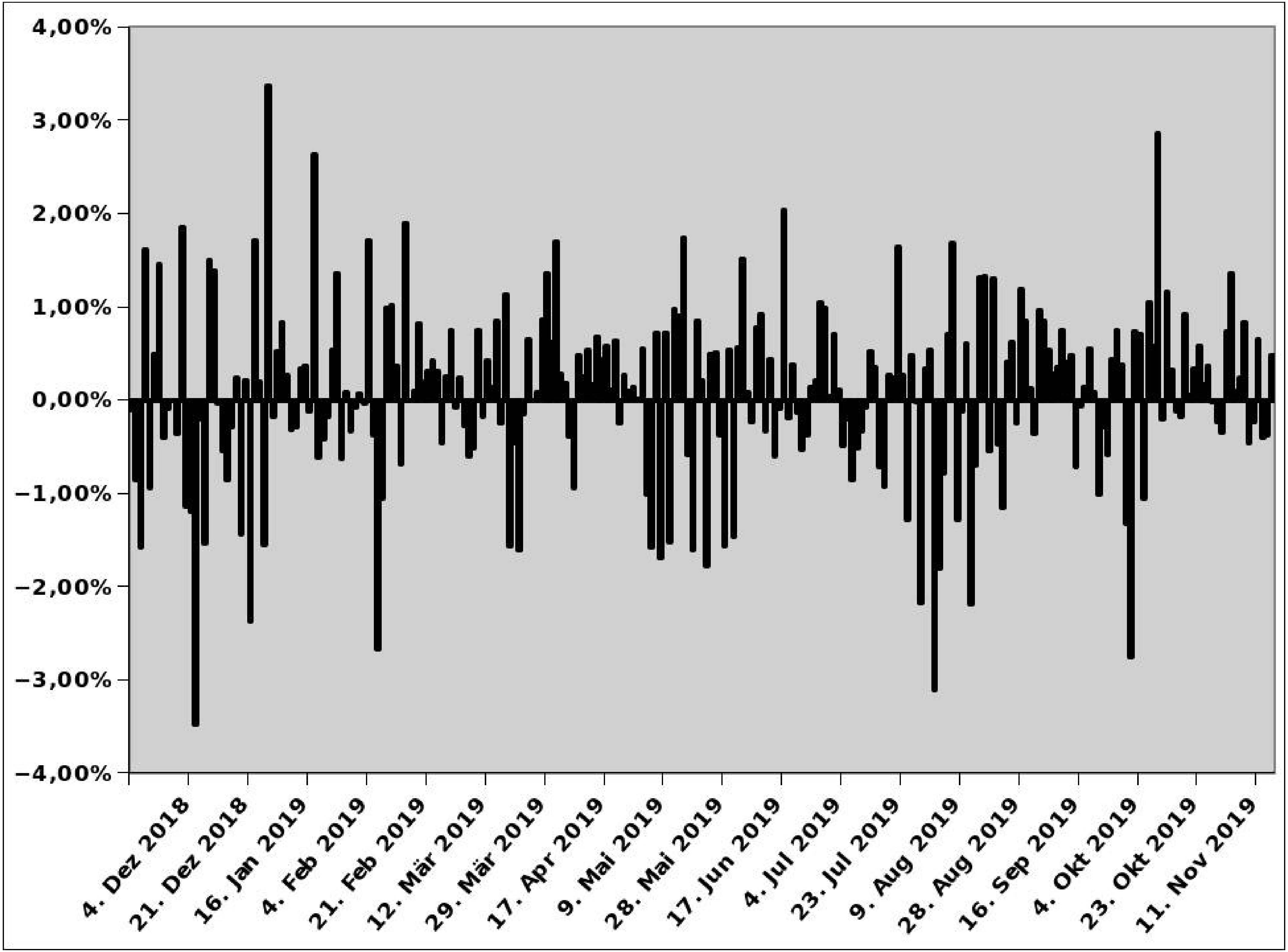
	Historische Kursdaten		Simulation	
	BMW	RWE	BMW	RWE
t = -200	73,20	19,54		
t = -199	72,10 (-1,5%)	19,21 (-1,7%)	75,21*0,985 = 74,08	26,21*0,983 = 25,76
…				
…				
t = -2	75,14 (+0,3%)	26,26 (+0,6%)	75,21*1,003 = 75,44	26,21*1,006 = 26,37
t = -1	74,24 (-1,2%)	25,92 (-1,3%)	75,21*0,988 = 74,31	26,21*0,987 = 25,87
t = 0	75,21 (+1,3%)	26,21 (+1,1%)	75,21*1,013 = 76,19	26,21*1,011 = 26,50

Historische Simulation (Beispiel Dax)

- Betrachte ein Portfolio, dass eins zu eins den Dax abbildet (Z.B. einen entsprechenden ETF)

- um den Value at Risk zu berechnen, werden für den Dax die historischen Renditen im Zeitraum 16. Nov. 2018 bis 15. Nov. 2019 betrachtet (251 Handelstage, $\sigma = 0{,}96\%$)

- diese Renditen werden der Größe nach geordnet. Der Value at Risk für ein 95%-iges Konfidenzniveau ist der 13-schlechteste Wert (5% von 251 = 12,55)


4,00%
3,00%
2,00%
1,00%
0,00%
−1,00%
−2,00%
−3,00%
−4,00%
4. Dez 2018
21. Dez 2018
16. Jan 2019
4. Feb 2019
21. Feb 2019
12. Mär 2019
29. Mär 2019
17. Apr 2019
9. Mai 2019
28. Mai 2019
17. Jun 2019
4. Jul 2019
23. Jul 2019
9. Aug 2019
28. Aug 2019
16. Sep 2019
4. Okt 2019
23. Okt 2019
11. Nov 2019

1	6. Dez 2018	−3,48%
2	2. Aug 2019	−3,11%
3	2. Okt 2019	−2,76%
4	7. Feb 2019	−2,67%
5	27. Dez 2018	−2,37%
6	14. Aug 2019	−2,19%
7	30. Jul 2019	−2,18%
8	5. Aug 2019	−1,80%
9	23. Mai 2019	−1,78%
10	9. Mai 2019	−1,69%
11	22. Mär 2019	−1,61%
12	20. Mai 2019	−1,61%
13	20. Nov 2018	−1,58%
14	7. Mai 2019	−1,58%

N = 251

Value at Risk (95%) = 1,58%

Value at Risk und Diversifikation

- Händler A investiert ausschließlich in Anleihen eines einzigen Emittenten mit einem Ausfallrisiko von 0,9% (Haltedauer 1 Jahr) => $VaR_{99\,\%} = 0$

- Händler B verteilt das Anlagevolumen gleichmäßig auf zwei Emittenten mit demselben Ausfallrisiko

- bei Händler B W-keit für mindestens einen Ausfall:
  $1 - 0{,}991^2 = 1{,}8\,\%$, daher $VaR_{99\,\%} > 0$

=> höherer(!) VaR für ein besser diversifiziertes Portfolio

Kohärente Risikomaße

- Artzner et al 1999: Theorie der „kohärenten“ Risikomaße

- wichtigste Bedingung von Artzner et al 1999 ist Subadditivität:

(für eine Kritik vgl. Rau-Bredow 2019)

$$\textit{Risiko}(X + Y) \leq \textit{Risiko}(X) + \textit{Risiko}(Y)$$

- Value at Risk ist nicht in allen Fällen subadditiv und daher <u>kein</u> kohärentes Risikomaß

- Expected Shortfall (auch Conditional VaR, *Ø*-licher Verlust in den *(1-p)%* schlechtesten Fällen) ist ein kohärentes und daher insbesondere auch subadditives Risikomaß