Heath, Jarrow, Morton Made Easy: Zur präferenzfreien Bewertung von Swaptions. Anmerkungen zu dem gleichnamigen Beitrag von Markus Rudolf, erschienen in: Finanzmarkt und Portfolio Management, 12. Jahrgang 1998 – Nr. 2, S. 170 – 196.

von Hans Rau-Bredow, Würzburg

1. Einführung

Ziel des Beitrags von Markus Rudolf ist eine vereinfachte Darstellung des von David Heath, Robert A. Jarrow und Andrew Morton entwickelten Zinsstrukturmodells. Dabei haben sich jedoch offensichtlich einige Fehler eingeschlichen; insbesondere erfüllt der Prozeß der Forwardrates nicht die grundlegende Arbitragefreiheitsbedingung. Dies wirkt sich natürlich unmittelbar auf die Richtigkeit der Ergebnisse bei der Bewertung der Zinsderivate aus.

Im folgenden soll zunächst das Zinsstrukturmodell von Heath/Jarrow/Morton (1990) für den Einfaktorfall[1] in diskreter Form dargestellt und das risikoneutrale Bewertungsprinzip, aus dem sich die Arbitragefreiheitsbedingung ergibt, erläutert werden. Ein Vergleich zeigt dann unmittelbar, daß die entsprechenden Bedingungen in dem von Rudolf (1998) definierten Prozeß nicht erfüllt sind. Einige kleinere Anmerkungen schließen sich an.

2. Der Prozeß der Forwardrates

2.1 Ein arbitragefreies Zinsstrukturmodell

Sei $f_{t,T,\tau}$ mit $t \le T < \tau$ der im Zeitpunkt t gültige stetige Zinssatz für eine Geldanlage bzw. Kreditaufnahme für den Zeitraum von T bis τ. Die Forwardrates $f_{t,T,\tau}$ können implizit aus den im Zeitpunkt t gegebenen Zinssätzen für unterschiedliche Laufzeiten ermittelt werden, in dem eine Geldanlage von t bis τ mit gleichzeitiger Zwischenfinanzierung durch Kreditaufnahme von t bis T betrachtet wird. Damit die Zinsstruktur in einem Zeitpunkt t vollständig bestimmt ist, genügt es offensichtlich, alle einperiodischen Forwardrates $f_{t,T,T+1}$ zu kennen, aus denen dann die Konditionen für längere Laufzeiten abgeleitet werden können.

[1] Der Aufsatz von Rudolf bezieht sich nur auf das Einfaktormodell. Für ein Zweifaktormodell vgl. z.B. Heath/Jarrow/Morton (1990) S.64ff.

In Anlehnung an Heath/Jarrow/Morton (1990) S.61 sei für die zeitliche Entwicklung der einperiodischen Forwardrates $f_{t,T,T+1}$ folgender Prozeß mit $\sigma = \sigma(t,T,f_{t,T,T+1})$ und $\delta = \delta(t,T)$ unterstellt:

$$f_{t+1,T,T+1} = f_{t,T,T+1} + \delta + \begin{cases} \sigma \\ -\sigma \end{cases} \tag{1}$$

Die Martingale-Wahrscheinlichkeit für die beiden Zustände sei jeweils 0,5, so daß σ mit der Standardabweichung bzw. Volatilität der Forwardrateveränderung übereinstimmt, die entsprechend den empirischen Ergebnissen zu spezifizieren ist. δ ist eine im folgenden genauer zu bestimmende Korrekturgröße, die so zu wählen ist, daß das risikoneutrale Bewertungsprinzip und damit Arbitragefreiheit erfüllt ist[2].

Vereinfachend sei zunächst eine Welt betrachtet, in der nur ein- und zweijährige Zerobonds gehandelt werden, die jeweils in t = 1 bzw. t = 2 eine Zahlung von 100 Geldeinheiten liefern. Der Kurs des einjährigen Zerobonds in t = 0 ist $P_{0,1} = 100 \exp(-f_{0,0,1})$ und der des zweijährigen Zerobonds $P_{0,2} = 100 \exp(-f_{0,0,1}) \exp(-f_{0,1,2})$. Der zukünftige Kurs $P_{1,2}$ des zweijährigen Zerobonds in t = 1 ist schließlich eine zufällige Größe mit Erwartungswert

$$E(P_{1,2}) = 100\, E(\exp(-f_{1,1,2})) \tag{2}$$

$$= 100 \left(\frac{1}{2} \exp(-f_{0,1,2} - \delta + \sigma) + \frac{1}{2} \exp(-f_{0,1,2} - \delta - \sigma)\right)$$

$$= 100 \exp(-f_{0,1,2}) \exp(-\delta) \frac{\exp(\sigma) + \exp(-\sigma)}{2}$$

Das risikoneutrale Bewertungsprinzip verlangt, daß der derzeitige Kurs $P_{0,2}$ gleich dem diskontierten Erwartungswert $\exp(-f_{0,0,1})\, E(P_{1,2})$ des zukünftigen Kurses ist. Demnach muß also gelten:

[2] Heath/Jarrow/Morton (1990) S.59f. zeigen durch ein Gegenbeispiel, daß im Fall von $\delta = 0$ die Arbitragefreiheitsbedingung im allgemeinen nicht erfüllt ist.

$$\delta \;=\; \ln\, \frac{\exp(s) \;+\; \exp(-s)}{2} \tag{3}$$

$$=\; \ln\; \cosh(\sigma)$$

$\delta = \delta(0,1)$ muß gleich dem natürlichen Logarithmus des Cosinus hyperbolicus von σ sein.

Da es in t =1 zwei mögliche Zustände gibt[3], kann jeder zustandsabhängige Zahlungsstrom durch eine geeignete Linearkombination aus ein- und zweijährigen Zerobonds, also aus sicherer und risikobehafteter Anlagemöglichkeit, dupliziert werden. Damit kann das risikoneutrale Bewertungsprinzip auf alle Finanztitel, insbesondere auch auf alle Zinsderivate angewendet werden. Der heutige Wert ist immer gleich dem diskontierten Erwartungswert der zukünftigen Payoffs.

Im allgemeinen Fall gibt es auch Zerobonds mit einer Laufzeit länger als zwei Jahre. Damit das risikoneutrale Bewertungsprinzip für beliebig aus Zerobonds mit unterschiedlicher Laufzeit zusammengesetzte Portfolios gilt, muß in jedem Zeitpunkt t der Preis $P_{t,\tau}$ eines zum Zeitpunkt τ fälligen Zerobonds gleich dem diskontierten Erwartungswert des zukünftigen Kurses $P_{t+1,\tau}$ sein. Der derzeitige Preis ist gleich

$$P_{t,\tau} \;=\; 100 \exp(-\, f_{t,t,t+1}) \exp(-\, f_{t,t+1,t+2}) \ldots \exp(-\, f_{t,\tau-1,\tau}) \tag{4}$$

$$=\; 100 \exp\Big(-\sum\nolimits_{k=t+1}^{t} f_{t,k-1,k}\Big)$$

Für den Erwartungswert des zukünftigen Kurses gilt:

$$E(P_{t+1,\tau}) \;=\; 100\, E\Big(\exp\Big(-\sum\nolimits_{k=t+2}^{t} f_{t+1,k-1,k}\Big)\Big) \tag{5}$$

---

[3] In einem hier nicht betrachteten Mehrfaktormodell hat man dagegen von jedem Knoten ausgehend mindestens drei Verzweigungen, vgl. Heath/Jarrow/Morton (1990) S.65.

$$= 100\,\Big(\frac{1}{2}\exp\big(-\textstyle\sum_{k=t+2}^{t}\,(f_{t,k-1,k} + \delta(t,k-1) + \sigma(t,k-1,f_{t,k-1,k}))\big)$$

$$+\ \frac{1}{2}\exp\big(-\textstyle\sum_{k=t+2}^{t}\,(f_{t,k-1,k} + \delta(t,k-1) - \sigma(t,k-1,f_{t,k-1,k}))\big)\Big)$$

$$= 100\exp\big(-\textstyle\sum_{k=t+2}^{t} f_{t,k-1,k}\big)\ \exp\big(-\textstyle\sum_{k=t+1}^{t}\delta(t,k-1)\big)\ \cosh\big(-\textstyle\sum_{k=t+1}^{t}\sigma(t,k-1,f_{t,k-1,k})\big)$$

Aus der Bedingung $P_{t,\tau} = \exp(-f_{t,t,t+1})\,E(P_{t+1,\tau})$ folgt somit:

$$\sum_{k=t+2}^{t}\delta(t,k-1) = \ln\cosh\Big(\sum_{k=t+2}^{t}\sigma(t,k-1,f_{t,k-1,k})\Big) \tag{6}$$

Man hat also insgesamt $\tau - t - 1$ Gleichungen, aus denen die $\tau - t - 1$ Variablen $\delta(t,t+1)$ ... $\delta(t,\tau-1)$ sukzessive bestimmt werden können. Man erhält $\delta(t,t+1) = \ln\cosh\sigma(t,t+1,f_{t,t+1,t+2})$ für $\tau = t+2$, und für $\tau > t+2$ sind die $\delta(t,t+1)$ ... $\delta(t,\tau-2)$ bereits bestimmt.

2.2 Der Forwardrate-Prozeß bei Rudolf (1998)

Rudolf (1998) S.174 modelliert den Prozeß der Forwardrates wie folgt:

$$(\tau - T)\,(f_{t+1,T,\tau} - f_{t,T,\tau}) = \begin{cases} \sigma - \ln\cosh(\sigma) \\ -\sigma - \ln\cosh(\sigma) \end{cases} \tag{7}$$

mit $\cosh(\sigma) = \dfrac{\exp(\sigma) + \exp(-\sigma)}{2}$. Die Martingale-Wahrscheinlichkeit für die beiden Zustände beträgt ebenfalls jeweils 0,5. Auf S. 175 wird außerdem $\sigma(t,T, f_{t,T,\tau}) = 0{,}0375\,(T-t)\,f_{t,T,\tau}$ gesetzt.

Für den Fall $\tau = T + 1$, also bei der Betrachtung einperiodischer Forwardrates, kann dieser Ansatz direkt mit dem oben definierten Modell verglichen werden. Offensichtlich erfüllt das bei Rudolf durch $\delta = -\ln\cosh(\sigma)$ gegebene δ nicht die oben abgeleitete Bedingung (6)[4]. Für die Zerobonds ist das risikoneutrale Bewertungsprinzip daher nicht gültig, wenn die Zero-

[4] Man beachte unter anderem, daß im allgemeinen $\ln\cosh(x+y) \neq \ln\cosh(x) + \ln\cosh(y)$. Im Fall $T = t + 1$ besteht die Abweichung lediglich aus einem anderen Vorzeichen.

bondpreise gemäß der sich aus (7) ergebenden Forwardratestruktur bestimmt werden. Damit kann das risikoneutrale Bewertungsprinzip auch nicht auf sonstige Zinsderivate angewendet werden.

Die sich ergebende numerische Abweichung ist allerdings nicht sehr groß. Stichproben ergeben bei den Zinssätzen eine Abweichung in der Größenordnung von einem Basispunkt; bei der Bewertung der Zerobonds mit Nennwert 100 Franken macht dies dann etwa einen Rappen aus. Je nach Ausübungspreis fällt die Abweichung bei Optionen auf Zerobonds aber prozentual entsprechend stärker ins Gewicht; außerdem kann sich der Fehler bei der rekursiven Bewertung je nach Anzahl der Schritte weiter aufschaukeln. Grundsätzlich gilt, daß die Abweichung umso kleiner ist, je kleiner die Volatilität σ ist. Für $\sigma = 0$ gilt $\ln \cosh(\sigma) = 0$ und damit in beiden Modellen auch $\delta = 0$.

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich, wenn auch $\tau > T + 1$ zulässig ist. In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten, um aus den im Zeitpunkt $t = 0$ gegebenen Forwardrates z.B. die zweijährige Forwardrate $f_{1,1,3}$ im Zeitpunkt $t = 1$ zu berechnen. $f_{1,1,3}$ kann einerseits direkt aus $f_{0,1,3}$ berechnet werden; andererseits können aber jeweils aus den einperiodischen Forwardrates $f_{0,1,2}$ und $f_{0,2,3}$ die künftigen einperiodischen Forwardrates $f_{1,1,2}$ und $f_{1,2,3}$ ermittelt werden, aus denen man $f_{1,1,3} = f_{1,1,2} + f_{1,2,3}$ erhält. Die beiden Vorgehensweisen führen nicht zum selben Ergebnis. Diese Anmerkung fällt allerdings deshalb weniger ins Gewicht, weil Rudolf den von ihm definierten Prozeß tatsächlich nur für einjährige Forwardrates anwendet, also nur für den Fall $\tau = T + 1$.

Wenn diese Kritik zutrifft, dann muß auch in dem Beweis auf S.193 ein Fehler stecken. Die mathematischen Umformungen sind offensichtlich alle korrekt. Bei der Berechnung des Erwartungswertes von $P_{t+1,T}$ auf S.193 rechts oben wird aber nicht berücksichtigt, daß $P_{t+1,\tau}$ ebenfalls eine nicht unabhängig von $P_{t+1,T}$ verteilte zufällige Größe ist.

3. Kleinere Anmerkungen

3.1 Die Identität von einjährigen Swaprates und einjährigen Spotrates

Auf S.184ff. bestimmt Rudolf die zustandsabhängige Entwicklung der Swaprates. Eine Swaprate $s_{t,T}$ ist ein für ein für den Zeitraum von t bis T gültiger Festzins, der zu entsprechenden variablen Zinszahlungen äquivalent ist. Es wird ausführlich erläutert, wie die Swaprates aus der Bedingung ermittelt werden können, daß der Barwert jeweils der fixen und der variablen Zinszahlungen übereinstimmen muß. Dabei fehlt jedoch der Hinweis, daß sich auch aus der auf S.194 angegebenen Formel unmittelbar ergibt, daß die einjährigen Swaprates $s_{t,t+1}$ mit den einjährigen Spotrates $r_{t,t+1} = f_{t,t,t+1}$ übereinstimmen. Die in Abbildung 8, rechte Seite angegebenen Werte stimmen also mit den bereits in Abbildung 4 angegebenen Werten völlig überein.

3.2 Zur Vorteilhaftigkeit von Swapverträgen bei vollkommenen Kapitalmärkten

Auf S.193f. zeigt Rudolf anhand eines Beispiels die Vorteile von Swapvereinbarungen auf: Unternehmen A mit Rating AAA kann sich entweder zu 5% fix oder variabel zu Libor plus 1% verschulden. Für Unternehmen B mit Rating BBB lauten die Alternativen 7% fix oder Libor plus 2%. A wählt fixe und B variable Zinszahlungen. Zusätzlich schließen beide Unternehmen eine Swapvereinbarung ab, nach der Unternehmen A Libor plus 1,25% an B zahlt und umgekehrt 5,5% fix erhält. Netto belaufen sich die Zahlungsverpflichtungen damit zu Libor plus 0,75% für Unternehmen A und 6,25% fix für Unternehmen B. Für beide Unternehmen haben sich die Konditionen gegenüber den durch den Kapitalmarkt definierten Bedingungen verbessert.

Ist der Kapitalmarkt vollkommen, dann kann sich ein Unternehmen durch eine Swapvereinbarung nur dann verbessern, wenn der Marktwert der sich aus einer solchen Vereinbarung ergebenden Zahlungsanwartschaften größer ist als der Marktwert der Zahlungsverpflichtungen. Hieraus folgt unmittelbar, daß sich nicht gleichzeitig für beide Unternehmen ein Vorteil ergeben kann. Ein eventueller Vorteil eines Unternehmens entspricht zwangsläufig einem Verlust des Vertragspartners.

Angewendet auf das Beispiel folgt, daß die Zahlungen von Unternehmen A an Unternehmen B im Vergleich zu dem, was fair wäre, offensichtlich zu hoch sind[5]. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß Unternehmen A mit dem Insolvenzrisiko von Unternehmen B mit Rating BBB belastet wird. A muß seinen Zahlungsverpflichtungen auch dann nachkommen, wenn B seine Verpflichtungen möglicherweise nicht erfüllt. Die optisch günstigeren Verschuldungskonditionen von Unternehmen A sind der faire Ausgleich für diese zusätzliche Risikoübernahme.

[5] Fair wäre offensichtlich Libor plus 0,5%, wenn B weiterhin 5,5% fix an A zahlt.

Literatur

Heath, D./Jarrow, R.A./ Morton, A. (1990): Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates, in: Review of Futures Markets, Band V9, Heft 1, S.54-76.

Rudolf, M. (1998): Heath, Jarrow, Morton Made Easy: Zur präferenzfreien Bewertung von Swaptions, in: Finanzmarkt und Portfolio Management, 12. Jahrgang, Nr. 2, S. 170 – 196.