Termingeschäfte und Derivate

Hans Rau-Bredow

hans.rau-bredow@uni-wuerzburg.de

Termine:

Montag, 11.03.2024, 10:15 Uhr, Seminarraum 308

Dienstag, 12.03.2024, 10:15 Uhr, Seminarraum 308

Freitag, 15.03.2024, 10:15 Uhr

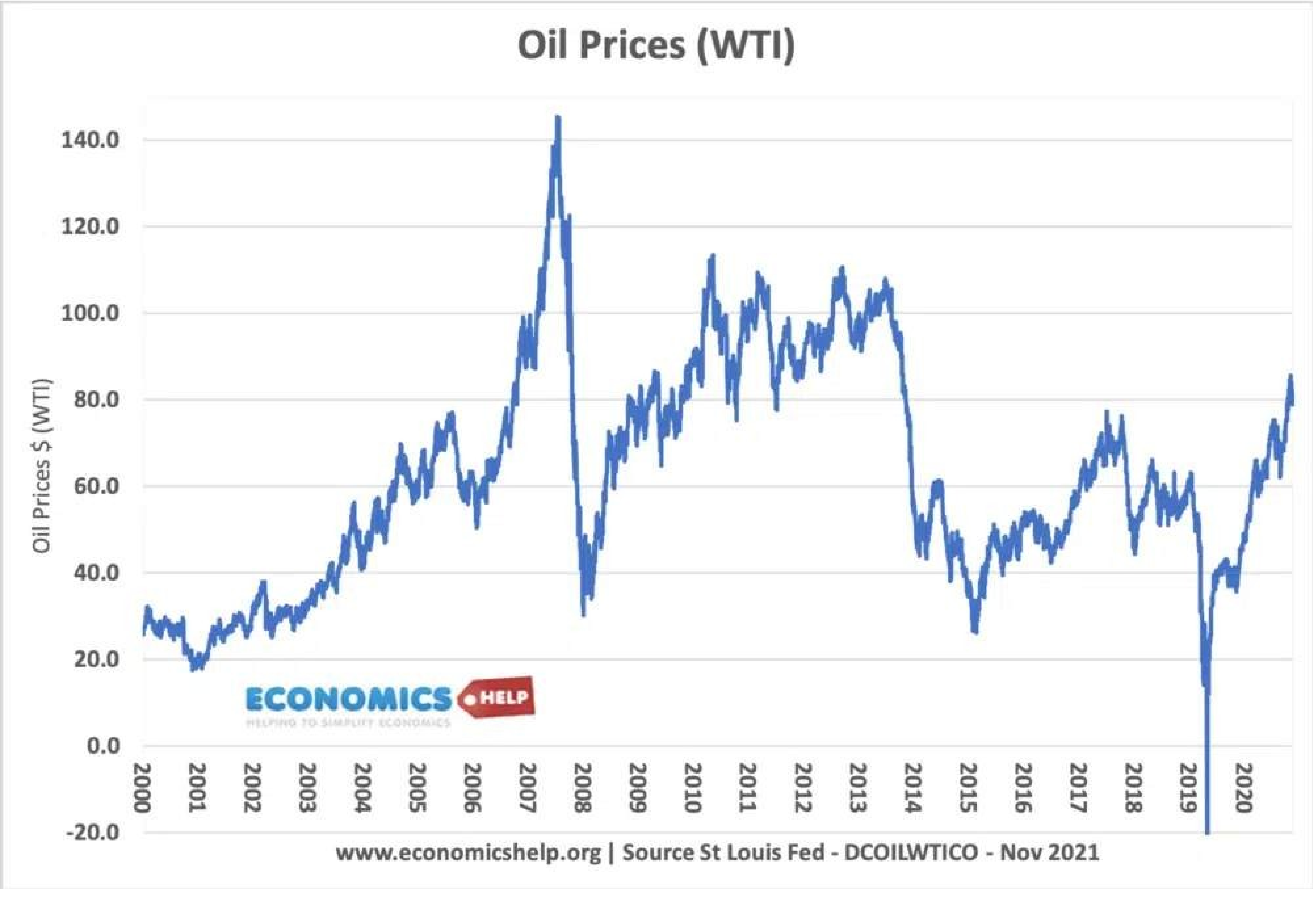
Gliederung

Montag:	1. Futures
Dienstag:	2. Optionen
	3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps
Freitag:	Wiederholung und Ergänzungen

Basisliteratur

Hull, John: Optionen, Futures und andere Derivate (Options, Futures and Other Derivatives)
(versch. Auflagen, für diesen Foliensatz wurde die deutsche Ausgabe von 2015 (9. Auflage) benutzt, das Inhaltsverzeichnis dieser Auflage: *http://d-nb.info/1075875099/04↑)*

Rau-Bredow, Hans (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets
online: *https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688*


Oil Prices (WTI)
Oil Prices $ (WTI)
140.0
120.0
100.0
80.0
60.0
40.0
20.0
0.0
-20.0
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
ECONOMICS HELP
www.economicshelp.org | Source St Louis Fed - DCOILWTICO - Nov 2021

Ölpreis Januar 2008

Spotpreis: 40 $ / Barrel

12-Monats Future: 60 $ / Barrel (Super Contango)

Risikoloser Arbitragegewinn:

- kaufe physisches Öl zu 40 $ / Barrel
- miete Lagerflächen für 12 Monate
- schließe Termingeschäft ab, das Öl in 12 Monaten zum Festpreis von 60 $ / Barrel zu verkaufen
- Gewinn = 20 $ minus Lager- und Zinskosten (sog. Cost of Carry)

- in effizienten Kapitalmärkten gibt es aber keinen „Free Lunch“, derartige Arbitragemöglichkeiten werden daher nach kurzer Zeit wieder verschwinden.

- die Handelsaktivitäten werden zum Anstieg des Spotpreises und zu einem fallenden Futurekurs führen, bis die Differenz genau den Lager- und Zinskosten entspricht.

- mit derartigen Überlegungen können also Aussagen zum Verhältnis von Spotpreis und Futurekurs gemacht werden (insb. ohne Rückgriff auf individuelle Risikopräferenzen)

Thema dieser Vorlesung:

- **Funktionsweise von Futures und Optionen**

- **<u>arbitragefreie Bewertung</u> von Futures und Optionen**

1. Futures

1. Einführung

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield

Termingeschäft (Forward/Future)

$t = 0$ (heute)

A und B vereinbaren die Lieferung eines Wirtschaftsgutes

in $t = T$ (z.B. in 12 Monaten) zum Festpreis F_0 (z.B. F_0 = 60 $).

$t = T$ (z.B. in 12 Monaten)

Das Wirtschaftsgut wird geliefert und F_0 = 60 $ überwiesen.

Forwards vs. Futures

<u>**Forwards:**</u> **Außerbörslich (over the counter (OTC) gehandelte Terminkontrakte, nicht anonym**

<u>**Futures:**</u> **Börsengehandelte Terminkontrakte (standardisiert, z.B. Fälligkeiten am 3. Freitag im März/Juni/September/Dezember), anonym**

G20 Zielvereinbarung Pittsburg von 2009: Kein OTC-Handel für standardisierte Derivate, zentrales Clearing.

Agrar-Terminmarktnotierungen vom 26. März 2013

Weizen MATIF €/t		
Mai 13	243,25	
Nov 13	214,75	
Jan 14	213,75	
Mrz 14	213,00	

Braugerste MATIF €/t		
Mrz 13	246,00	
Mai 13	250,00	-
Nov 13	252,00	-
Jan 14	244,00	-

MATIF = Marché de Terme International de France

(heute Euronest Paris)

Contango: Futurepreis F_0 ist größer als Spotpreis S_0

Backwardation: Futurepreis F_0 ist kleiner als Spotpreis S_0

Bestandteile von Futures-Kontrakten

- Spezifizerung der Qualität des Wirtschaftsgutes (z.B. Öl: Schwefelgehalt, relative Dichte, z.B. Weizen: Feuchtigkeit, Bruchkorn, Auswuchs, Besatz)

- Lieferort

- Erfüllung: Physische Lieferung oder Barausgleich

- Sicherheiten (Margins)

Kontraktspezifikationen Chicago Mercantile Exchange

(www.cmegroup.com)

Öl:	**Physische Lieferung**
Weizen:	**Physische Lieferung**
Gold:	**Physische Lieferung**
S&P 500 (Aktienindex):	**Barausgleich**
Bitcoin:	**Barausgleich (Referenzpreis: Durchschnittlicher Handelspreis an mehreren Kryptobörsen)**

Barausgleich (cash settlement)

- ein Bauer hat im Januar ein Termingeschäft über den Verkauf (short) von einer Tonne Weizen im September zum Festpreis von F_0 = 200 €/t abgeschlossen.

- im September ist der Weizenpreis S_T = 193 €/t

- bei Barausgleich würde der Bauer dann $F_0 – S_0$ = 7 € aus dem Termingeschäft erhalten zusätzlich zum Verkaufserlös von 193 €/t (insgesamt 200 €/t; bei einem Weizenpreis von 206 € müsste er dagegen 6 € an seinen Kontrahenten zahlen)

Physische Lieferung ist selten

- Selbst wenn in den Kontraktbedingungen vorgesehen, ist physische Lieferung ein seltenes Ereignis. Die meisten Kontrakte werden vor Fälligkeit durch entsprechendes Gegengeschäft geschlossen (vgl. Hull Business Snapshot 2.1).

- Das bedeutet nicht zwingend, dass es sich immer um reine Spekulationsgeschäfte handelt. Der Kontrakt könnte trotzdem zu Hedging-Zwecken abgeschlossen worden sein.

Vorzeitiges Closing von Futures durch Gegengeschäft

$t = 0$ Verkauf eines Futures auf Weizen zu $F_0 = 200$ €
(Eröffnung (open) einer short Position).

$t < T$ Kauf eines Futures zu $F_t = 193$ € (Schließung (close)
der short Position durch eine gegenläufige long Position).

=> am Fälligkeitstag T heben sich Kauf zu 193 € und Verkauf
zu 200 € gegenseitig auf und ergeben einen Gewinn von 7 €.

Negativpreise für Öl (WTI) im April 2020

- im April 2020 wurden für den im folgenden Mai fälligen Öl-Future negative Preise notiert (in der Spitze minus 40 $), mehr dazu↑ (später fällige Futures notierten durchgängig im Plus).

- Hintergrund waren die durch die Covid19-Pandemie ausgelösten globalen Einschränkungen der wirtschaftlichen Aktivitäten.

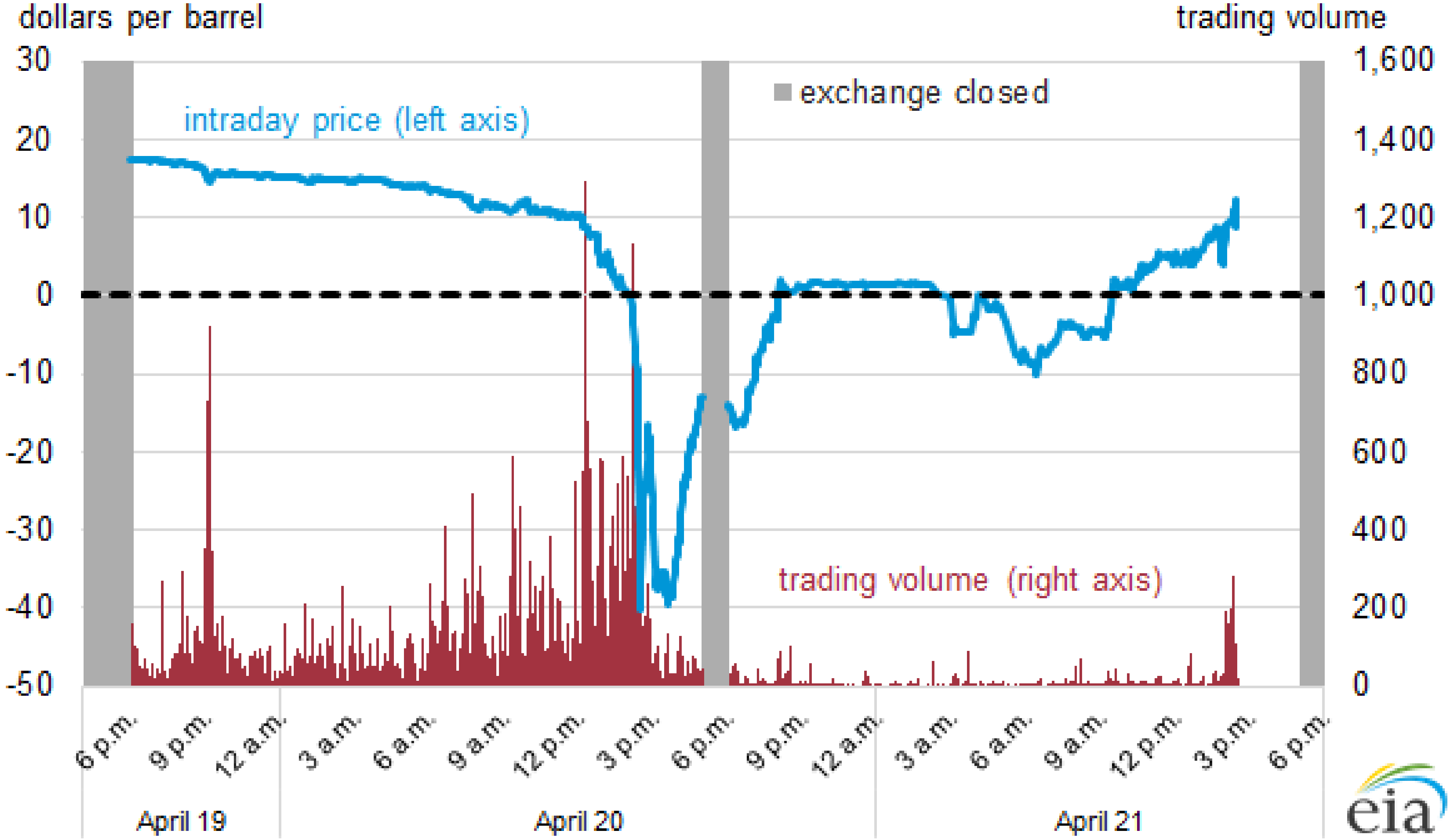
- der extreme Nachfrageschock führte zu einem Überangebot an Öl und zu knapp werdenden Lagerkapazitäten.

- der entsprechende Öl-Kontrakt sah physische Lieferung im Mai 2020 vor. Inhaber einer long-Position mussten den Kontrakt also rechtzeitig (letzter Handelstag 21. April 2020) durch Verkauf schließen, um eine physische Lieferung und schwer kalkulierbare Lagerkosten zu vermeiden (link zu den Kontraktbedingungen↑).

- wer zu -40 $ einen Future kauft (Aufbau einer long-Position), erhält also Geld dafür, dass er sich verpflichtet, physisches Öl abzunehmen.

- Problem ist offensichtlich, dass Öl aus Gründen des Umweltschutzes nicht einfach irgendwo entsorgt werden kann. Dagegen sind negative Preise z.B. für Weizen oder Gold schwer vorstellbar. Bei Strom-Futures kommen aber negative Preise gelegentlich vor.

Figure 1. May 2020 West Texas Intermediate futures contract



Source: U.S. Energy Information Administration based on data from CME Group and Bloomberg, L.P.

2. Handel mit Futures, insbesondere Margins und tägliche Abrechnung

Geschichte Termingeschäfte

- historisch zuerst für Agrarprodukte

- Termingeschäfte bereits in der Antike?

- Tulpenfutures in den Niederlande 17 Jh.

- Reis-Börse in Osaka/Japan geründet 1697 (existierte bis 1939) wird oft als erste organisierte Terminbörse genannt

- Einführung von Futures auf Rohöl in 1983

Volumen des Derivatemarktes

- Eine häufig zitierte Zahl beziffert den weltweiten Handel mit Derivaten auf 700.000 Mrd. US-Dollar (wie gemessen?) (Vergleich: Globales BIP 2023 ≈ 104.500 Mrd. US-Dollar)

- siehe Statistiken der Bank für Internationalen Zahlungs-ausgleich (BIZ): https://www.bis.org/statistics/dataportal/derivatives.htm

- Umsatz Ölfuture ca. 1.000 Mrd. Barrel/Tag, Fördermenge/Verbrauch ca. 100 Mio. Barrel/Tag (Faktor 10.000)

Höhere Volatilität durch Derivate?

- Es wird diskutiert, ob Termingeschäfte zu mehr Volatilität und Preissteigerungen etwa auf Getreide- oder Ölmärkten führen (Stichwort Financialization).
- Bei Barausgleich (Nullsummen-Spiel) zumindest keine direkten(!) Einflüsse auf den physischen Spotmarkt.
- Aber Gefahr der Marktmanipulation durch große Player ("Cornering" eines Marktes, z.B. Aufkauf von Silber durch die Gebrüder Hunt in den 1970er Jahren)
- Beispiel: Verbot von Zwiebel-Futures in den USA seit 1958

youtube: Why Trading Onions on Financial Markets is Illegal

Spekulation: Fluch oder Segen?

- Spekulation als dezentrales Preisentdeckungsverfahren, bei dem die Preise Informationen über Ressourcen - knappheiten liefern, die einem zentralen Planer nie vollständig verfügbar sein können (F.A. Hayek 1899-1992).

- Andererseits: Herdenverhalten und irrationale Blasenbildung

Absicherungsstrategien mit Termingeschäften

- Absicherung gegen <u>fallende Verkaufspreise</u> durch Verkauf von Futures (short position): Landwirte, Ölproduzenten, Goldminen

- Absicherung gegen <u>steigende Einkaufspreise</u> durch Kauf von Futures (long position): Getreidemühlen, Raffinerien, Fluggesellschaften, Goldverarbeiter

- Absicherung gegen Währungsschwankungen:

  Unternehmen, bei denen Einnahmen und Ausgaben in unterschiedlichen Währungen anfallen.

Hedging-Strategien in der Praxis

- Barrick Gold, weltgrößter Goldproduzent, hat sich lange Jahre gegen fallende Goldpreise abgesichert. Als der Goldpreis ab den 2000er Jahren stieg, wurde das Hedging auf Druck der Aktionäre aufgegeben vgl. Ahn 2018 S.95↑

- Der Mineralölkonzern Exxon Mobil hat in der Vergangenheit weitgehend auf Hedging verzichtet, da genügend Cash Reserven vorhanden waren, um mögliche Verluste auszugleichen Quelle: Bloomberg 2015↑

- Mexiko ist bekannt dafür, seine Öleinnahmen auf den Terminmärkten abzusichern. Quelle: Reuters 2019↑

Theoretische Überlegungen zum Hedging

- aus dem Irrelevanztheorem von Modigliani/Miller folgt, dass Anleger ihr Risikoexposure unabhängig von den Finanzierungs- und Hedgingentscheidungen der Unternehmen bestimmen können. (Der Aktionär einer Goldmine könnte z.B. auch selber Goldfutures verkaufen, um sich gegen fallende Goldpreise abzusichern.)

- diese Aussage setzt allerdings reibungslos funktionierende Kapitalmärkte ohne Transaktionskosten voraus.

Vorteile des Hedging auf Unternehmensebene

- Kostenverteile der Unternehmen beim Abschluss von Termingeschäften

- bei eingeschränkten steuerlichen Verlustverrechnungs-möglichkeiten ist die Glättung der Jahresgewinne durch Hedging mit Steuervorteilen verbunden

- geringere Schwankungen der Gewinne ermöglicht die Innenfinanzierung von antizyklischen Investitionen

- geringes Insolvenzrisko beim Hedging möglicher Verluste

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (1)

- die Anteilseigner können ihr Portfolio einfacher diversifizieren als ein einzelnes Unternehmen

- das Management soll sich primär auf das operative Geschäft konzentrieren.

- Können alle Veränderungen der Einkaufspreise immer an die Kunden weitergegeben werden, dann ist kein Hedging notwendig und kann sogar zu vermeidbaren Verlusten führen (vgl. dazu Hull 3.2).

Nachteile des Hedging auf Unternehmensebene (2)

- sehr große Unternehmen würden durch Absicherungs-strategien die Terminpreise beeinflussen, d.h. es ist fraglich ob eine Absicherung zu fairen Konditionen möglich ist.

- schließlich werden Verluste aus Hedginggeschäften von den Anteilseignern anders wahrgenommen als Ausgaben für eine Versicherung, obwohl die ökonomische Funktion die gleiche ist.

Margin Calls

- Damit die Handelsteilnehmer jederzeit ihren Verpflichtungen nachkommen können, verlangen die Terminbörsen die Stellung ausreichend hoher Sicherheiten (Margin Requirements).

- Im Fall von Verlusten sind die Handelsteilnehmer zu Nachschüssen verpflichtet (Margin Calls), andernfalls wird die Position unmittelbar liquidiert.

Der Mechanismus der täglichen Abrechnung (Hull 2.4)

- Kauf von 2 Gold Future Kontrakten (1 Kontrakt = 100 Unzen) zum Kurs von 1.250 $ je Feinunze.
- Initial Margin = 6.000 $ je Kontrakt => insgesamt 12.000 $ müssen mindestens auf dem Margin-Konto sein
- Maintenance Margin 4.500 $ je Kontrakt => Margin Call, falls Saldo < 9.000 $
- der tägliche Gewinn/Verlust ergibt sich aus der Differenz des Settlement Preises zum Vortag mal Kontraktwert 100 mal 2 Kontrakte

Day	Trade price ($)	Settlement price ($)	Daily gain ($)	Cumulative gain ($)	Margin account balance ($)	Margin call ($)
1	1,250.00				12,000	
1		1,241.00	−1,800	−1,800	10,200	
2		1,238.30	−540	−2,340	9,660	
3		1,244.60	1,260	−1,080	10,920	
4		1,241.30	−660	−1,740	10,260	
5		1,240.10	−240	−1,980	10,020	
6		1,236.20	−780	−2,760	9,240	
7		1,229.90	−1,260	−4,020	7,980	4,020
8		1,230.80	180	−3,840	12,180	
9		1,225.40	−1,080	−4,920	11,100	
10		1,228.10	540	−4,380	11,640	
11		1,211.00	−3,420	−7,800	8,220	3,780
12		1,211.00	0	−7,800	12,000	
13		1,214.30	660	−7,140	12,660	
14		1,216.10	360	−6,780	13,020	
15		1,223.00	1,380	−5,400	14,400	
16	1,226.90		780	−4,620	15,180	

Kontrollrechnung

- Einstiegskurs 1.250 $ - Ausstiegskurs 1.226,90 $ = 23,10 $

- Verlust: 23,10 $ * Kontraktwert 100 * 2 Kontrakte = 4.620 $

- Gesamte Einzahlungen auf das Margin-Konto:

12.000 $ + 4.020 $ (Margin Call) + 3.780 $ (MarginCall) = 19.800 $

- Schlusssaldo Margin-Konto: 15.180 $

- Verlust: 19.800 $ - 15.180 $ = 4.620 $ ok

Stimmen Forward- und Future-Kurse überein?
(vgl. Hull 5.8 und Business Snapshot 5.2)

- börsengehandelte Futures werden täglich, OTC Forward Kontrakte dagegen erst bei Fälligkeit abgerechnet.
- es ergibt sich ein Zinsvor- oder -nachteil, wenn Gewinne bzw. Verluste zeitlich früher verbucht werden
- sind Gewinne und Verlust gleich wahrscheinlich, dann werden sich die Zinsvor- und -nachteile weitgehend gegenseitig aufheben; man kann daher unterstellen:

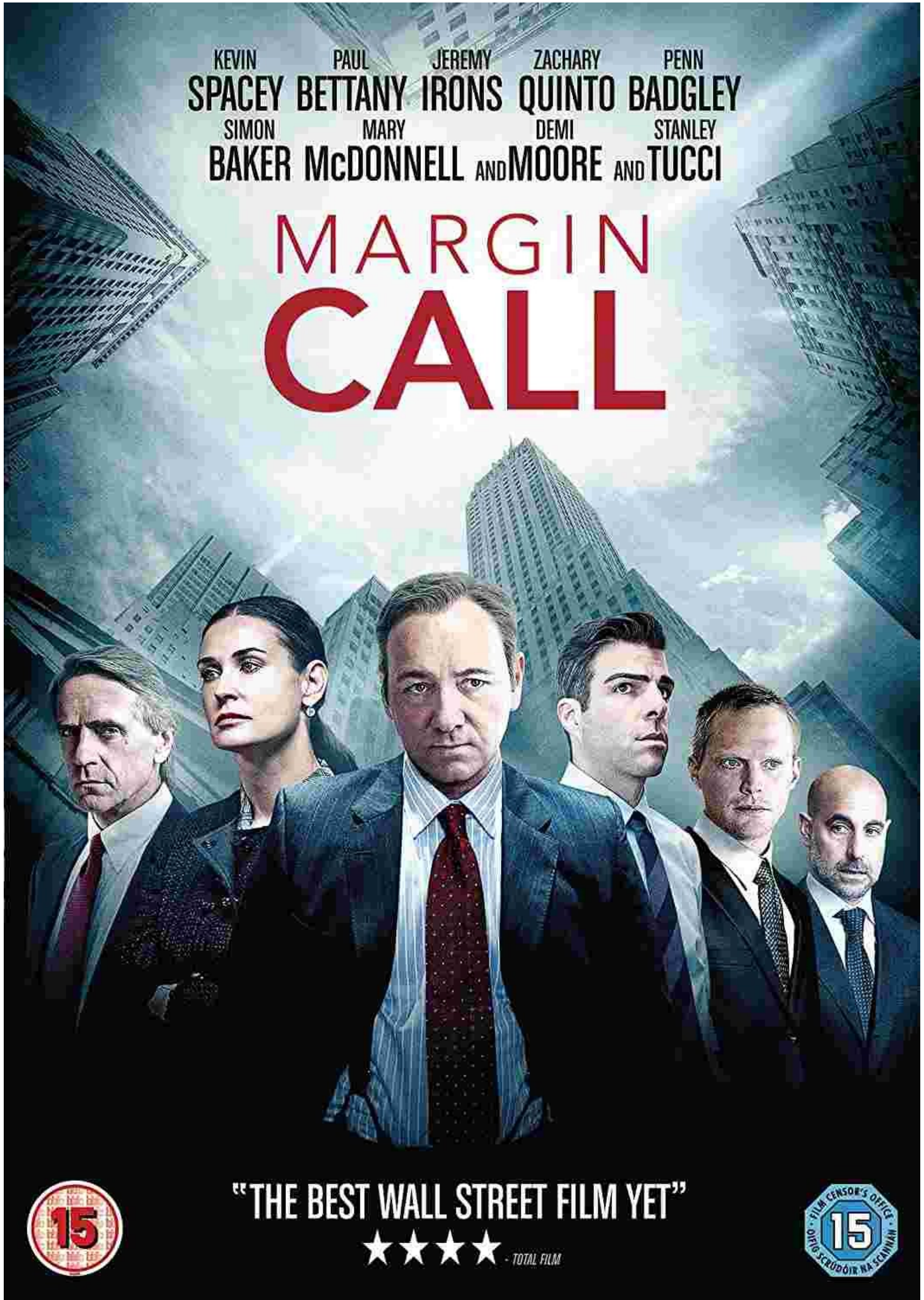
Future Preis ≈ Forward Preis

Wirken Margin-Calls krisenverschärfend?

- Margin-Calls können zu einem plötzlichen sehr hohen Liquiditätsbedarf führen und zwar auch dann, wenn die Derivate rein zu Absicherungszwecken gehalten werden.

- Gashändler sichern sich z.B. gegen fallende Gaspreise ab, indem sie Gas auf Termin verkaufen (short). 2022 sind die Gaspreise wegen des Ukraine-Krieges aber stark gestiegen.

- Im Herbst 2022 musste die Bank of England Notkäufe am Anleihemarkt mehrfach ausweiten, da Margin-Calls wegen steigender Zinsen eine Systemkrise auszulösen drohten.


KEVIN SPACEY PAUL BETTANY JEREMY IRONS ZACHARY QUINTO PENN BADGLEY
SIMON BAKER MARY McDONNELL AND DEMI MOORE AND STANLEY TUCCI
MARGIN CALL
"THE BEST WALL STREET FILM YET"
★★★★ - TOTAL FILM
15
15

3. Arbitragefreie Bewertung von Futures: Cost of Carry, Carry Trades und Reverse Carry Trades

Carry Trade (dividendenlose Aktie)

- **Aktienkurs** S_0 **= 40 €,**
- **3-Monats-Future** F_0**= 43 €,**
- **Zins i = 4% (1% pro Quartal)**

Aktion heute (t = 0)

- Kreditaufnahme 40 €
- Aktienkauf zu S_0 **= 40 €**
- Kauf eines 3-Monats-Future mit F_0 **= 43 €**

Aktion in 3 Monaten (t = T)

- Future wird fällig, Verkauf der Aktie zu F_0 **= 43 €**
- von dem Erlös werden 40,40 € (40 € + 1%) für die Kreditrückzahlung verwendet

=> risikoloser Gewinn durch "Carry Trade": 2,60 €

Für den Gewinn p aus einem Carry Trade gilt:

$$p = F_0 - S_0 (1 + i)^T$$

In arbitragefreien Märkten sind Carry Trades nicht profitabel. Aus $p \leq 0$ folgt:

$$F_0 \leq S_0 (1 + i)^T$$

- Häufig wird mit der Annahme gearbeitet, dass die Zinsen nicht zu diskreten Zeitpunkten (monatlich, quartalsweise, jährlich) gezahlt werden, sondern ein kontinuierlicher, ununterbrochener Zufluss unterstellt (vgl. Hull 4.2).

- In der Konsequenz ist dann der Aufzinsungsfaktor $(1 + i)^T$ durch den Term e^{rT} zu ersetzen, mit r = stetiger Zins und Eulersche Zahl e = 2,718… :

$$F_0 \leq S_0 e^{rT}$$

Futures auf Einkommen generierende Assets

- es sei nun angenommen, dass das entsprechende Wirtschaftsgut Einkommen generiert (z.B. Dividenden)

- wird dieses Einkommen verzinslich angelegt, dann erhöht es den Profit aus dem Carry Trade und führt somit zu einer niedrigeren oberen Schranke für den Futureskurs F_0.

Prozentuale stetige Rendite

- alternativ kann man eine stetige Rendite annehmen, die in den Zukauf weiterer Güter kontinuierlich reinvestiert wird.

- bei einer Rendite q sind dann pro ursprünglichem Gut am Ende der Laufzeit e^{qT} Güter im Portfolio.

- wird antizipierend in $t = 0$ eine entsprechend höhere Anzahl an Futures verkauft, dann ist der Profit aus dem Carry Trade:

$$p = F_0 e^{qT} - S_0 e^{rT}$$

Aus $p \leq 0$ folgt jetzt:

$$F_0 \leq S_0 e^{(r-q)T}$$

Lagerkosten

- Lagerkosten u können als negative Erträge $q = - u$ **interpretiert werden, so dass folgende Ungleichung gilt:**

$$F_0 \leq S_0 \, e^{(r + u)\,T}$$

- die Summe $r + u$ **aus Zins- und Lagerkosten wird als Cost of Carry bezeichnet.**

1989 – 2004	Lagerkosten (US-$/Monat)	Lagerkosten p.a. (%)
Rohöl (WTI)	0,40/Barrel	22,05
Heizöl	3,00/Tonne	22,05
Aluminium	7,80/Tonne	6,31
Gold	0,004/Unze	0,01
Weizen	3,33/Bushel	11,91
Mais	2,00/Bushel	9,97

Tabelle 1: Geschätzte Lagerkosten ausgewählter Rohstoffe (1989 – 2004)

Quelle: LEWIS ET AL. (2007), S. 32.

Entnommen aus: Kern 2010, S. 33↑

Elektrizität: Lagerkosten ?

Future-Preise beim Crash Oktober 1987

„Trading on Black Monday was chaotic. … By late afternoon, the S&P 500 Index futures were selling at a 25-point, or 12 percent, discount to the spot market, a spread that previously was considered inconceivable.“

Quelle: Siegel, J.J. (2002): Stocks for the Long Run, S. 266, vgl. auch Hull Business Snapshot 5.4

=> Arbitragemöglichkeit?

- bisher wurde eine obere Grenze für den Futurekurs abgeleitet.

- es stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen der Futurekurs genau an dieser Grenze (dies wird als „Full Carry" bezeichnet) oder unterhalb dieser Grenze liegt.

- insbesondere im Fall von Backwardation, also Futurekurs F_0 kleiner als Spotpreis S_0, wäre der Markt nicht in Full Carry.

Reverse Carry Trades

- Betrachte die Situation $F_0 = 38 < S_0 = 40$ (Backwardation)

- Für langfristig orientierte Investoren wie z.B. Pensionsfonds oder Versicherungen würde es sich lohnen, Aktien zum Kurs von $S_0 = 40$ zu verkaufen, den Erlös verzinslich anzulegen und gleichzeitig den Rückerwerb zu $F_0 = 38$ zu vereinbaren.

- alternativ könnten die Papiere für die Laufzeit des Future-Kontraktes an einen Hedgefonds verliehen werden, der dann die entsprechende Transaktion durchführt.

- bei solchen „Reverse“ Carry Trades trennt sich der Investor für die Laufzeit des Futures von dem entsprechenden Wirtschaftsgut, bei gleichzeitigen Rückkauf auf Termin.

- „Reverse“ Carry Trades sind nur möglich, wenn Bestände vorhanden (siehe nächstes Kapitel).

- „nackte“ Leerverkäufe ohne vorherige physische Eindeckung sind keine Alternative, da die börsliche Lieferfrist zwei Bankarbeitstage beträgt. (Bei längerer Lieferfrist hätte man es dagegen mit einem originären Termingeschäft (Forward-Kontrakt) zu tun).

Zwischenergebnis

Annahme: „Reverse" Carry Trades sind möglich

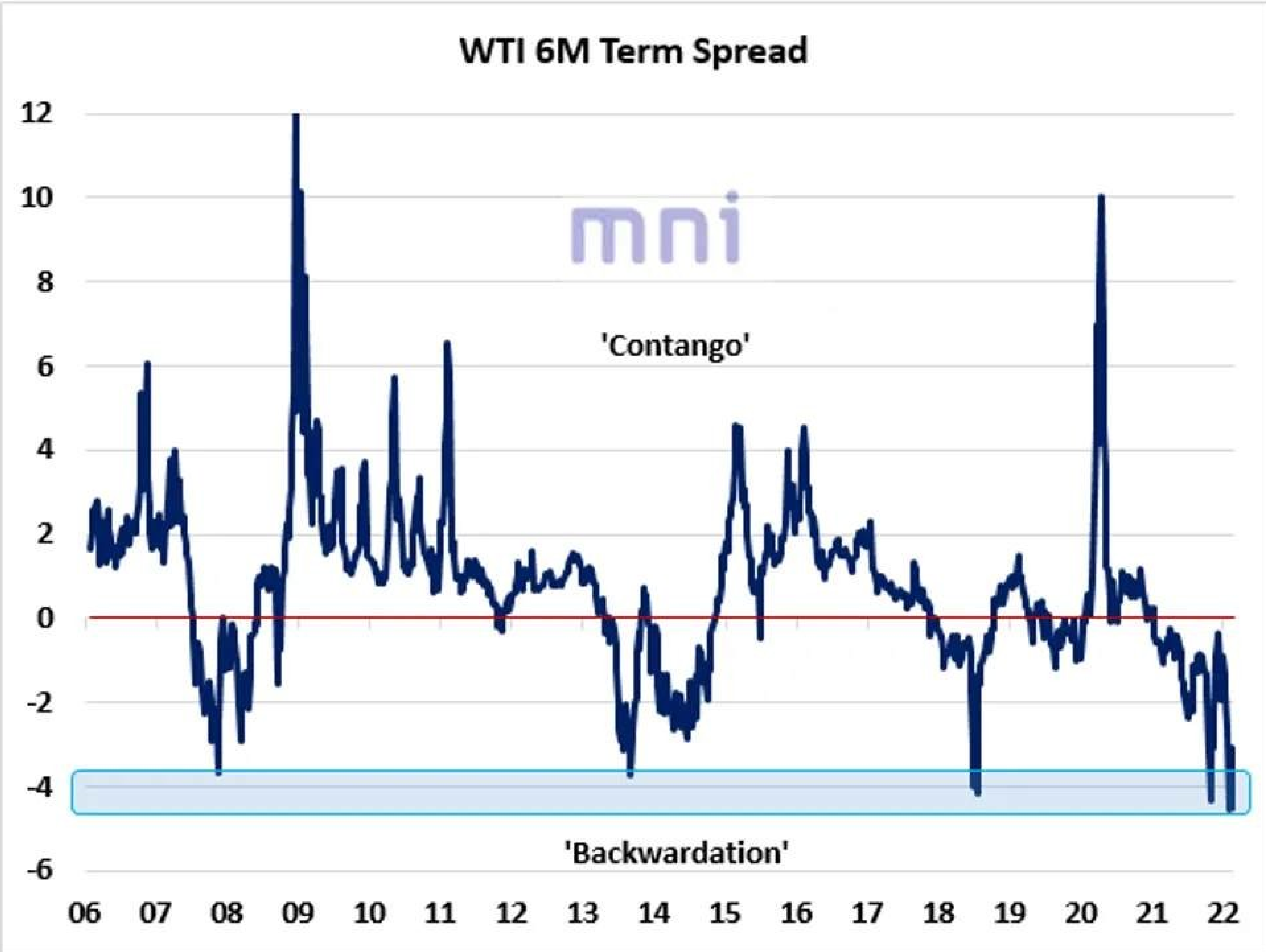
$F_0 > S_0 e^{rT}$ (super contango) => **Carry Trade vorteilhaft**

$F_0 < S_0 e^{rT}$ (kein full carry) => **„Reverse" Carry Trade vorteilhaft**

=> Arbitragefreiheit: $\boxed{F_0 = S_0 e^{rT}}$

Falls das Asset Einkommen *q* generiert: $\boxed{F_0 = S_0 e^{(r - q)T}}$

4. Contango vs. Backwardation: Die Rolle der Convenience Yield


WTI 6M Term Spread
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
'Contango'
'Backwardation'
06
07
08
09
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
mni

- die Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Differenz (Spread) zwischen 6-Monats-Terminkurs und Spotpreis (bzw. ersatzweise dem nächstfälligen Terminkurs)

- positiver Spread bedeutet Contango, negativer Spread Backwardation

- man erkennt Super-Contango 2008/2009 (Finanzkrise) und 2020 (Corona-Pandemie)

- außerdem zeigt sich, dass der Markt längere Zeit in Backwardation ($F_0 < S_0$) verharrte.

- Backwardation ($F_0 < S_0$) ist also empirisch beobachtbar

- Backwardation impliziert Markt ist nicht in Full Carry

(Ausnahme: $q > r$, trifft aber z.B. bei Lagerkosten u wegen $q = -u$ nicht zu.)

- in unserer Formel für den Futurekurs kann also das Ungleichheitszeichen nicht immer durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden.

- Grund: Reverse Carry Trade Arbitrage nicht immer möglich

- um zu verstehen warum das der Fall sein kann, betrachte z.B. eine Knappheit am Weizenmarkt mit entsprechend hohen Spotpreis.
- gleichzeitig wird erwartet, dass die bevorstehende Ernte sehr reichhaltig ausfallen wird.
- Futures, die erst nach der Ernte fällig werden, werden also unter dem aktuellen Spotpreis notieren (Backwardation, da nur <u>vorübergehende</u> Knappheit)
- profitable Reverse Carry Trades sind nicht möglich, da die noch vorhandenen Weizenbestände bis zum Beginn der nächsten Ernte aufgebraucht sein werden.

Eine fragwürdige Hedging-Strategie

- als alternatives Beispiel betrachte eine Ölraffinerie, die ihre Ölvorräte zum (hohen) Spotpreis verkauft und gleichzeitig in (bei Backwardation relativ günstigere) Futures investiert.

- der zukünftige Bedarf wird am Spotmarkt zu Tagespreisen beschafft. Steigen die Ölpreise, werden Futures mit Gewinn verkauft (genauer: durch Gegengeschäft geschlossen) und so die steigenden Beschaffungspreise ausgeglichen.

- diese Hedgingstrategie setzt jedoch voraus, dass sich Spotpreis und Futurekurs immer parallel entwickeln.

- dies ist aber bei <u>temporären, nur vorübergehenden Knappheiten</u> am Markt nicht der Fall (Beispiel: Kurzfristige Unterbrechung der Ölproduktion wegen eines Hurrikans). In solchen Fällen steigt nur der Spotpreis, nicht aber länger laufende Futures. Die Hedging-Strategie läuft ins Leere.

Convenience Yield

- falls also mit (nur) vorübergehenden Versorgungs-engpässen gerechnet werden muss, ergibt sich ein Vorteil für den physischen Besitz gegenüber dem Halten eines Futurekontraktes.

- dieser Vorteil des physischen Besitzes wird als Convenience Yield *y* (vgl. Kaldor 1939, deutsch: Verfügbarkeits- oder Liquiditätsprämie) bezeichnet (physischer Besitz als „Real-Option“, die bei Engpässen ausgeübt werden kann)

- mit Hilfe einer Convenience Yield y lässt sich dazu folgende Gleichung formulieren:

$$F_0 = S_0 \, e^{(r + u - y)\, T}$$

- Convenience Yield y ist als eine Residualgröße zu interpretieren und taucht - im Unterschied zu den Cost of Carry $r + u$ - in keiner Gewinn- und Verlustrechnung auf.

- Backwardation kann durch eine Convenience Yield y erklärt werden, die größer als die Cost of Carry $r + u$ ist.

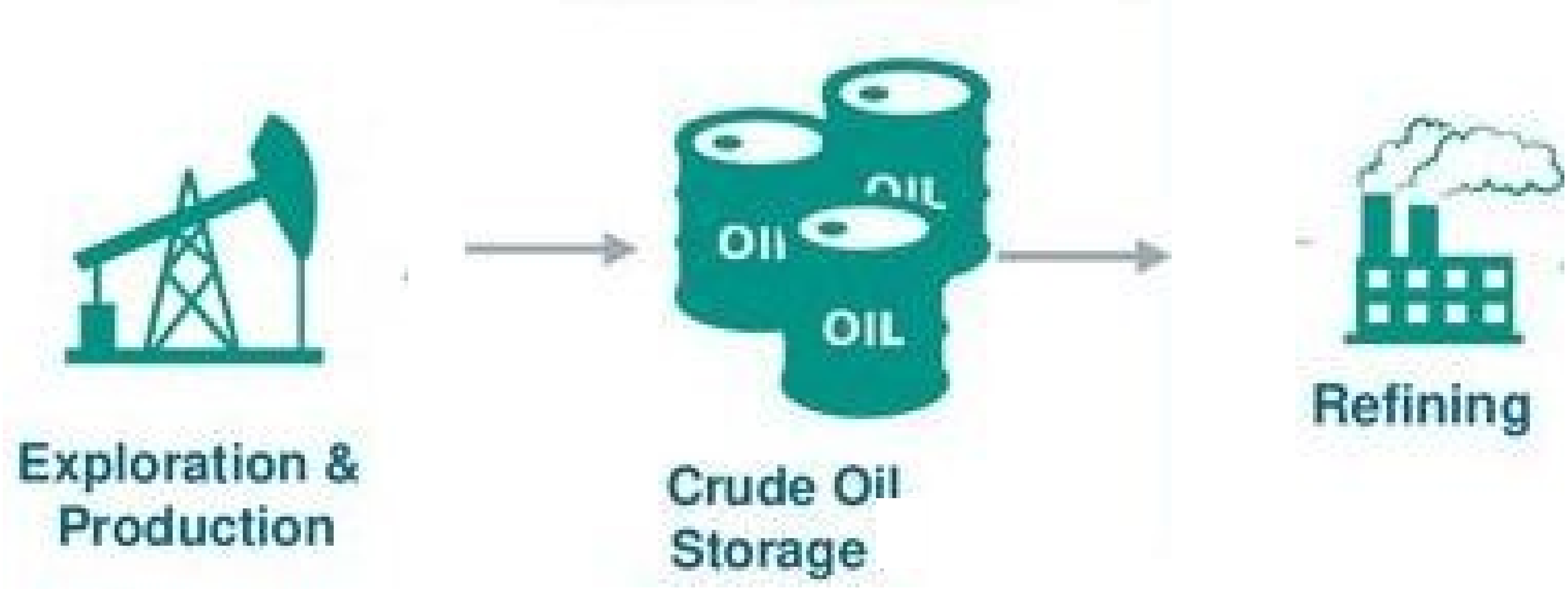
Investitions- versus Konsumgüter (Hull 5.1; 5.11)..

- *Investitionsgüter* werden für Investitionszwecke dauerhaft gehalten (z.B. Wertpapiere, Fremdwährung, Gold etc.). Reverse Carry Trades sind immer möglich, da ausreichende Bestände vorhanden. Der Markt ist immer in Full Carry.

- *Konsumgüter* werden dagegen im Produktionsprozess verbraucht (z.B. Öl, Weizen). Es kann zu Knappheiten mit sehr geringen Lagerbeständen kommen. Aufgrund einer positiven Convenience Yield kann Backwardation eintreten.

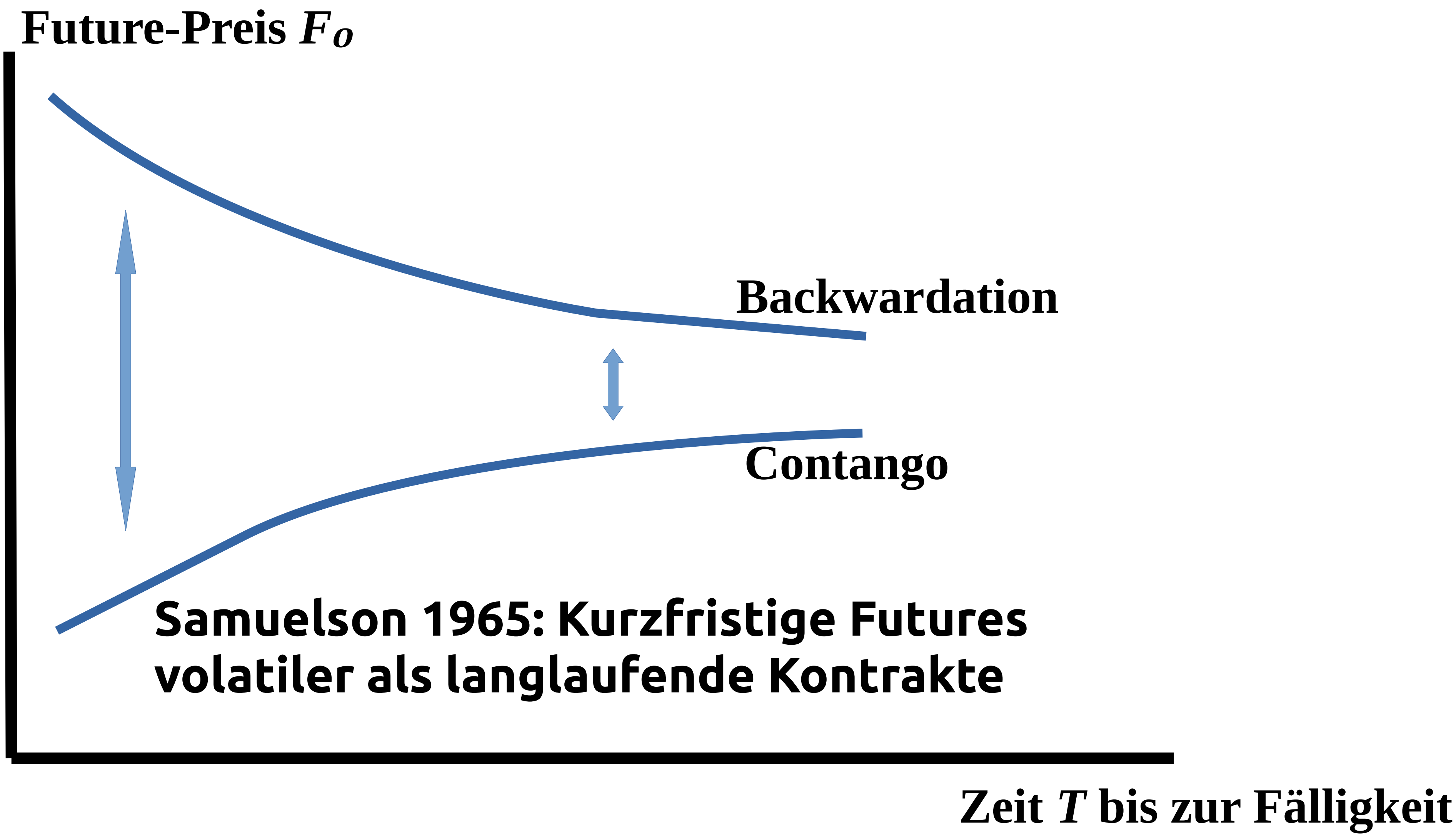
Investitionsgüter (z.B. Gold) werden dauerhaft gelagert

Konsumgüter (z.B. Öl) werden im Produktionsprozess verbraucht



Investitionsgüter	Konsumgüter
(z.B. Wertpapiere, Gold)	(z.B. Öl)
- ausreichende Bestände, keine Knappheiten	- temporäre Knappheit möglich
- Convenience Yield = 0	- Convenience Yield > 0
- Backwardation tritt nicht auf, Markt in Full Carry	- Backwardation möglich

Terminstruktur von Futures im Zeitablauf



Samuelson Hypothese

- Samuelson 1965 hat postuliert, dass der Spotpreis und kurzfristige Futures volatiler sind als langlaufende Kontrakte.

- bei steigenden Kursen wird daher häufig Backwardation eintreten und bei fallenden Kursen Contango.

- Die Samuelson Hypothese kann (in Übereinstimmung zu obigen Ausführungen zu Backwardation) damit erklärt werden, dass der Markt für kursbeeinflussende Nachrichten regelmäßig nur einen vorübergehenden Effekt unterstellt.

2. Optionen

1. Einführung

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Derivate

Forwards/Futures (Terminkontrakte)

__zweiseitig__ verpflichtend

Optionen

__einseitig__ verpflichtend

Call / Kauf-option

Put / Ver-kaufsoption

Optionsgeschäft

t = 0 (heute)

A kauft von B für c = 12 € eine europäische Kaufoption (Call) mit Basispreis K = 90 € und Fälligkeit in 12 Monaten.

$t = T$ (in 12 Monaten)

Je nach Börsenpreis S_T erwirbt A von B den Basiswert für K = 90 € oder lässt die Option wertlos verfallen.

Optionswert = Innerer Wert + Zeitwert

Innerer Wert (Wert bei sofortiger Ausübung):

= $max\left(S_T - K, 0\right)$ **für Kaufoption (Call)**

= $max\left(K - S_T, 0\right)$ **für Verkaufsoption (Put)**

Zeitwert: ?

2. Amerikanische Optionen: Das Problem der vorzeitigen Ausübung

- *Europäische* Option: Kann nur bei Endfälligkeit ausgeübt werden.

- *Amerikanische* Option: Kann jederzeit während der Laufzeit ausgeübt werden.

=> Wann lohnt sich die vorzeitige Ausübung einer amerikanischen Option?

Eine amerikanische Kaufoption auf eine <u>dividendenlose</u> Aktie sollte nicht vor Fälligkeit ausgeübt werden (Hull 11.5)

- **letztlich egal, ob Aktie direkt oder über eine jederzeit ausübbare Option gehalten wird**

- **Basispreis möglichst spät zahlen (Zinsvorteil, zumindest falls keine Negativzinsen)**

- **Aktienkurs könnte unter Basispreis fallen**

Was gilt wenn die Long-Position in der Aktie komplett aufgelöst werden soll?

- Marktpreis S_t ist der Preis, den potentielle Käufer bereit sind für die Aktie zu zahlen.

– solche Käufer würden für die nicht ausgeübte Option den inneren Wert $S_t - K$ zu zahlen bereit sein plus einen gewissen Aufschlag für den Zeitwert.

– also besser die „lebende“ Option verkaufen als diese auszuüben und anschließend die Aktie zu verkaufen

Formaler Beweis

Portfolio A: **Option plus Cash in Höhe des abgezinsten Basiswertes** $K(1+i)^{-t}$

=> Wert bei Fälligkeit der Option: $max(S_T;K)$

Portfolio B: **Eine Aktie**

=> Wert bei Fälligkeit der Option: S_T **(** $\leq$ **Portfolio A)**

> Payoff von Portfolio A ist größer/gleich dem von Portfolio B, daher gilt entsprechend für die Anschaffungskosten:

$$c_t + K\,(1+i)^{-t} \geq S_t$$

$$c_t \geq S_t - K\,(1+i)^{-t} > S_t - K$$

> Optionswert c_t **also echt größer als innerer Wert der Option**

> Vorzeitige Ausübung nicht lohnend (Zeitwert > Null)

Amerikanische Kaufoption auf Basiswerte mit positiven Erträgen

- wenn das Wirtschaftsgut Erträge generiert kann die vorzeitige Ausübung lohnend sein.

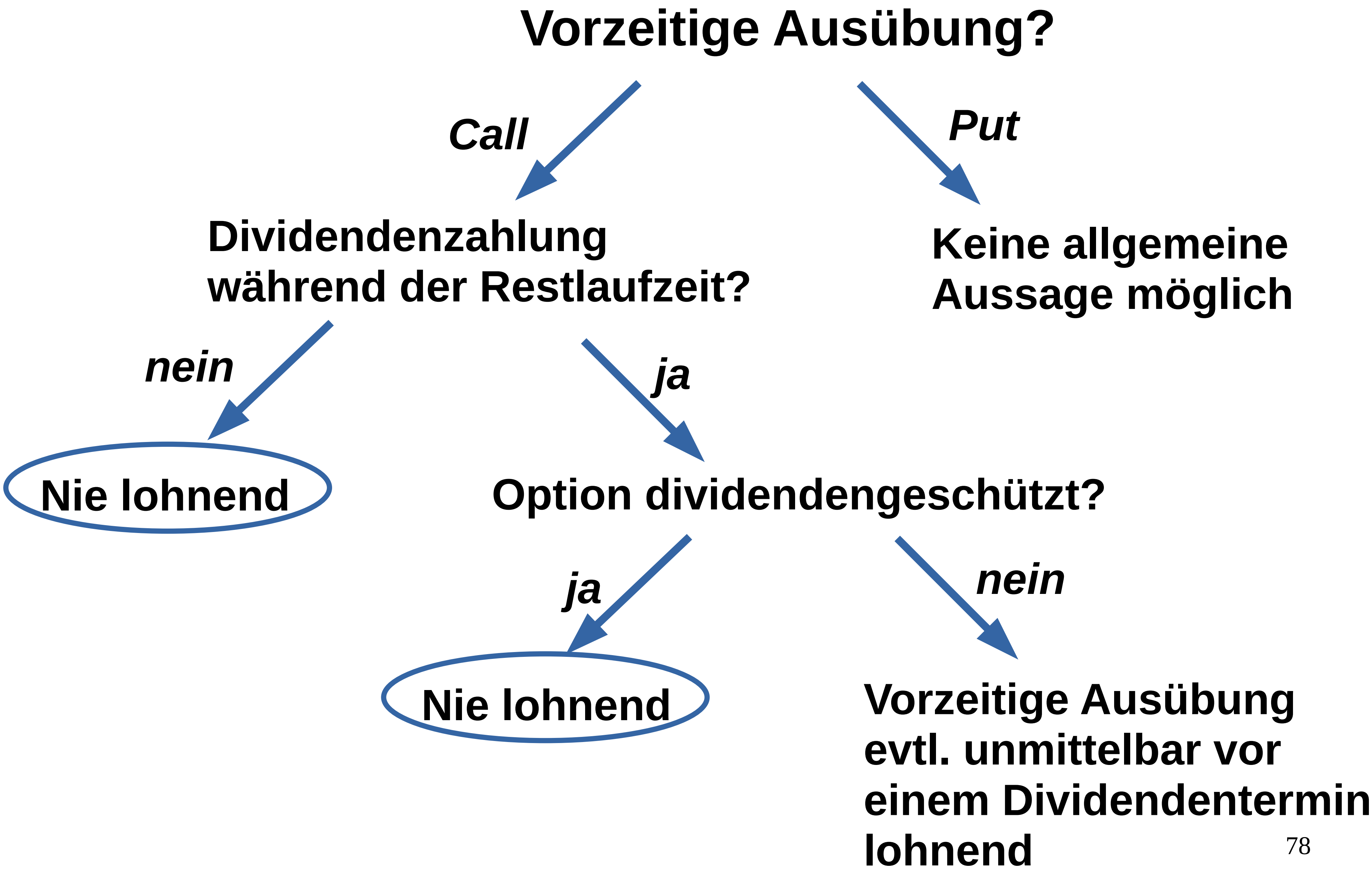
- Ausübung dann frühestens unmittelbar vor der ersten Ertragszahlung

- Optionsbedingungen können eine Anpassung der Parameter (Basispreis und/oder Kontraktgröße) vorsehen, um die Dividendenzahlung zu neutralisieren (Dividendenschutz, vgl. auch Hull 10.4).

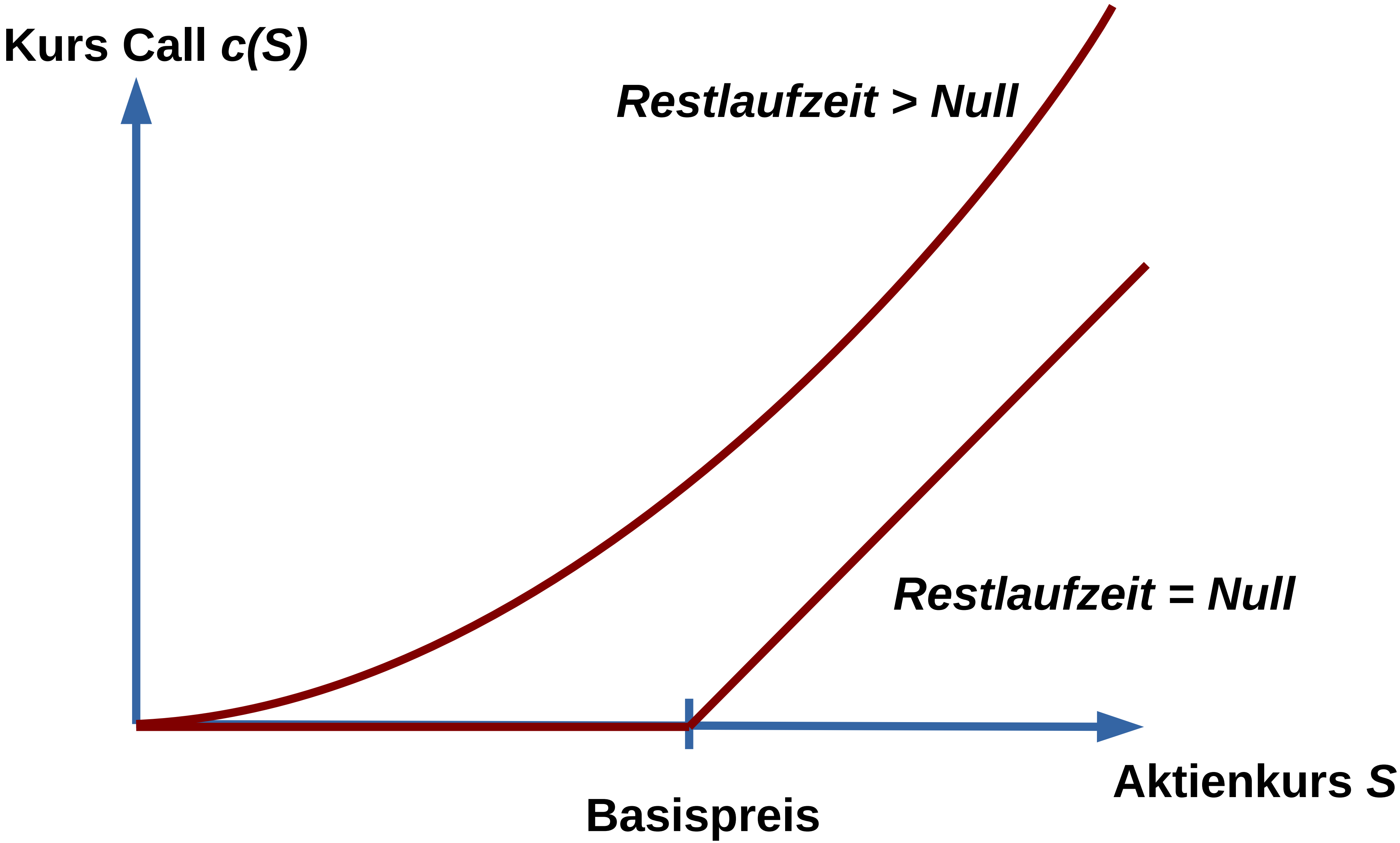
  Dann wäre trotz Dividendenzahlung eine vorzeitige Ausübung nie opportun.

Vorzeitige Ausübung eines amerikanischen Puts

- für amerikanische Puts (Verkaufsoptionen) gibt es keine allgemeine Aussage hinsichtlich der vorzeitigen Ausübung.
- wenn der Basiswert völlig wertlos geworden ist (mit Null als unterer Preisgrenze, also keine Negativpreise), lohnt sich auf jeden Fall die sofortige Ausübung.
- die vorzeitige Ausübung kann sich eventuell aber auch bereits dann lohnen, wenn der Kurs bereits sehr stark unter den Basiswert gefallen ist.


Vorzeitige Ausübung?
Call
Put
Dividendenzahlung während der Restlaufzeit?
Keine allgemeine Aussage möglich
nein
ja
Nie lohnend
Option dividendengeschützt?
ja
nein
Nie lohnend
Vorzeitige Ausübung evtl. unmittelbar vor einem Dividendentermin lohnend

3. Delta-Hedging, Gamma-Risiko und Black-Scholes Differentialgleichung

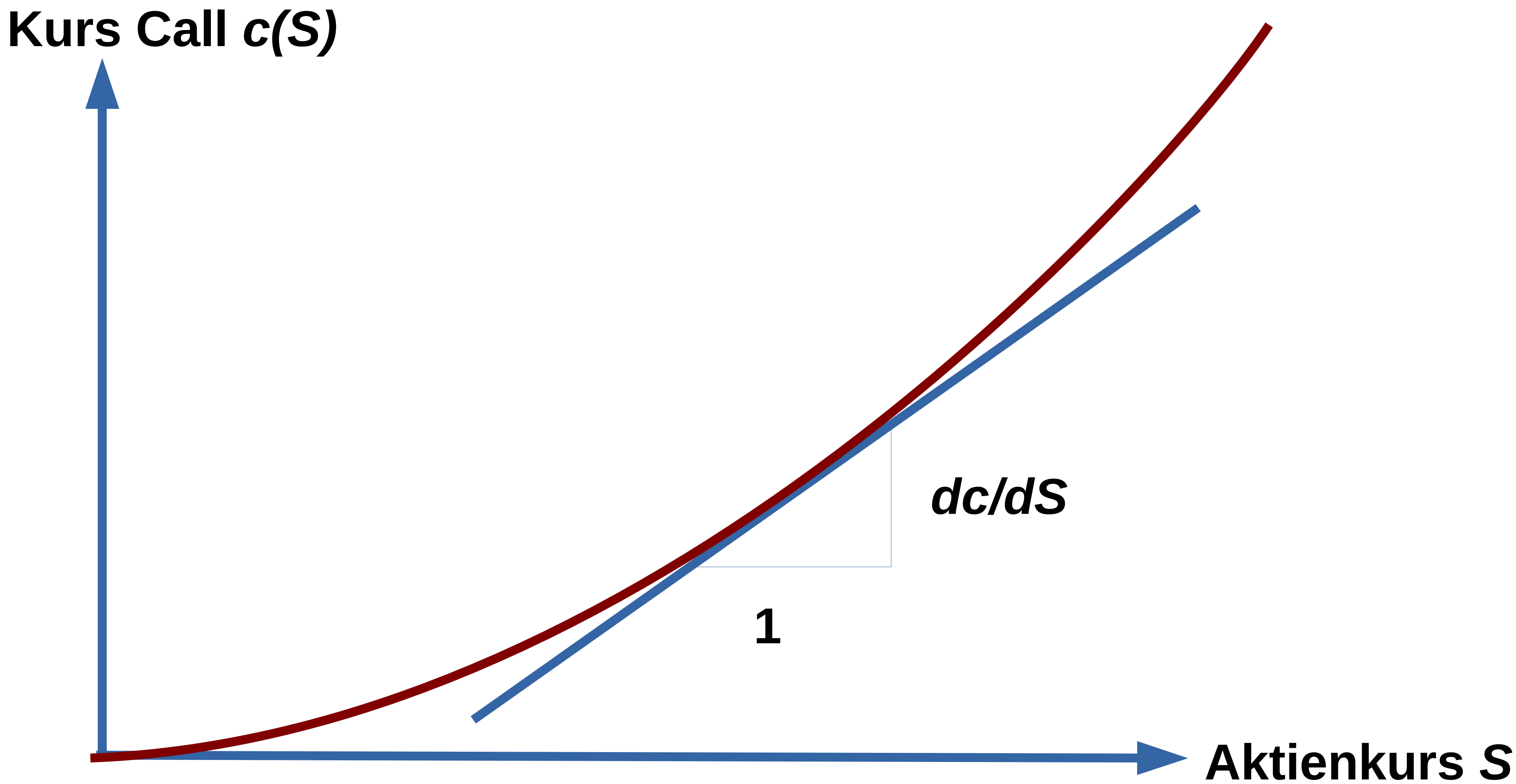

Kurs Call *c(S)*
Restlaufzeit > Null
Restlaufzeit = Null
Aktienkurs *S*
Basispreis

Delta-Hedging (Hull 19.4)

- Delta ist die erste Ableitung des Optionpreises *c(S)* nach dem Aktienkurs *S*: $\Delta = \frac{dc}{dS}$

- wenn der Aktienkurs um 1 € steigt/fällt, dann steigt/fällt der Optionspreis um Delta Δ .

- eine Option hat daher approximativ das gleiche Risiko / Chancenprofil wie ein Portfolio aus Δ Stück Aktien


Kurs Call *c(S)*
dc/dS
1
Aktienkurs *S*

Zahlenbeispiel

Portfolio A: 100 Optionen, wobei $\Delta = 0{,}79$

Portfolio B: 79 Aktien

Aktienkurs		Optionspreis	
99		11,57	
	± 1		$\pm 0{,}78$
100		12,35	
	± 1		$\pm 0{,}80$
101		13,15	

=> wenn der Aktienkurs um $\pm$ 1 € schwankt, dann ungefähr gleicher Gewinn/Verlust bei beiden Portfolios A und B.

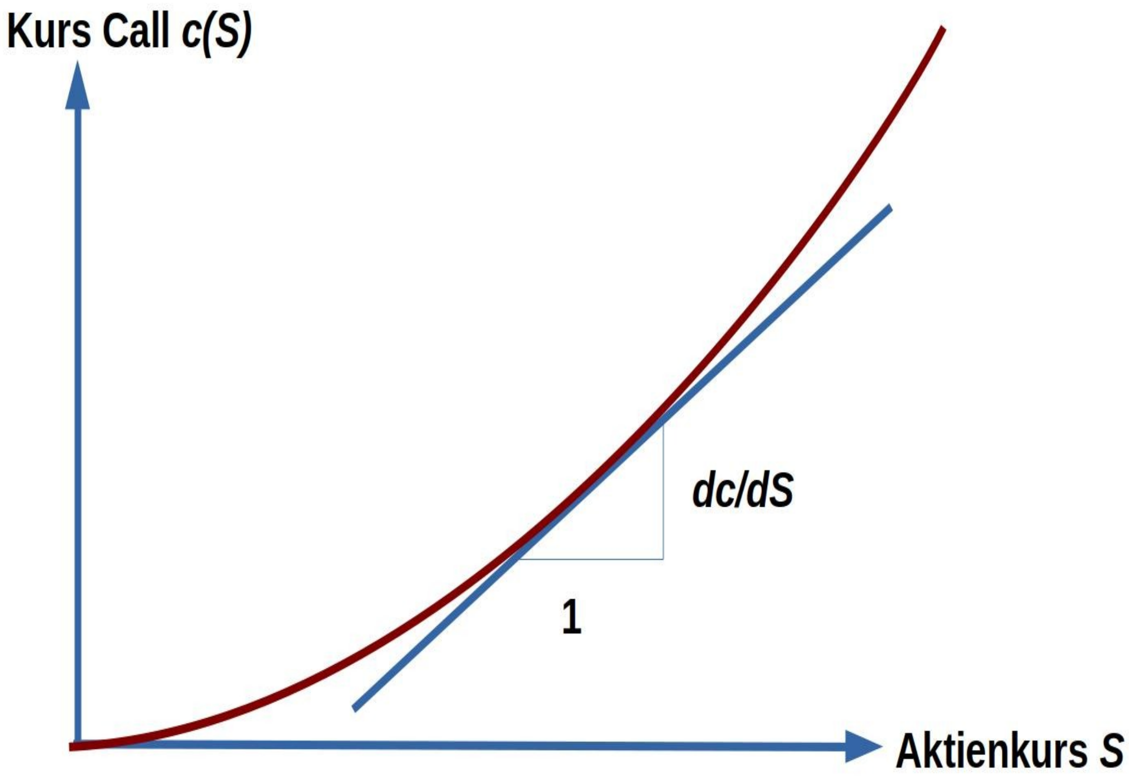
(Annahmen: Basispreis $K = 90$, Restlaufzeit $T = 1$ Jahr, Zins $r = 0{,}5\%$ und Volatilität $\sigma = 15\%$)

- eine solche Delta-Approximation ist ungenau, da der Optionswert ist eine konvexe Funktion des Aktienkurses *S* ist:

> **- bei einem Kursrückgang der Aktie von 1 € fällt der Call nur um 78 Cent**
>
> **- bei einer Kurssteigerung von 1 € steigt der Call sogar um 80 Cent**

=> Delta-Approximation unterschätzt die Gewinne der Option und überschätzt die Verluste.

Der Optionswert ist keine lineare Funktion des Aktienkurses. Bei sinkenden Kursen verliert die Option weniger an Wert und gewinnt bei steigenden Kursen mehr an Wert als der Basiswert (Konvexität bzw. Gamma-Risiko)



Dynamisches Delta-Hedging in der Praxis (Hull 19.4)

- eine Bank hat Call-Optionen auf die OC Oerlikon Aktie an einen Kunden verkauft. Die Bank fungiert also als Stillhalter.

- für die Bank ergibt sich ein negativer Marktwert, der mit steigenden Kursen zunimmt und umgekehrt.

- um dieses Risiko zu hedgen, wird die Bank für jede Option Δ Stück Aktien kaufen

- allerdings muss das Hedge-Portfolio kontinuierlich angepasst werden, da das Delta bei steigenden Kursen zunimmt und bei fallenden Kursen abnimmt.

Dynamisches Delta-Hedging und Volatilität

9. August 2007 (sda/Reuters)

Händler erklärten, der Verkaufsdruck sei von Derivaten auf die Oerlikon-Aktien verstärkt worden. ... Denn wenn die Aktie deutlich unter die Options-Ausübungskurse sinke, sei es nicht mehr notwendig, gleich viele Aktien als Absicherung zu halten. Dies löse eine Abwärtsspirale aus.

9. November 2007 (Neue Zürcher Zeitung)

Im SLI setzten die Titel von OC Oerlikon ... ihren seit drei Tagen andauernden Aufwärtstrend fort. ... Ein Analyst merkte an, es müssten Positionen aufgebaut werden, um Optionen zu hedgen.

Erwartungswert des Optionspreises:

Approximation durch Taylor-Entwicklung 2. Grades

(vgl. entsprechend auch Itô's Lemma)

$$E\{c[S(1 \pm \varepsilon)]\} = c(S) \pm \underbrace{E(\varepsilon)\, S \frac{dc}{dS}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} E(\varepsilon^2)\, S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}_{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}}$$

Zufällige Rendite *ε*
mit *E(ε) = 0*

Anwendung auf das Zahlenbeispiel

(*ε = ± 1%* jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50%)

$$E(c) = \frac{c(99)+c(101)}{2} = \frac{11{,}57+13{,}15}{2} = 12{,}36 > 12{,}35 = c(100)$$

=> Mittelwert der Optionswerte für Aktienkurse *S* = 99 und *S* = 101 ist größer als der Optionswert für *S* = 100.

=> Option profitiert von der Volatilität des Aktienkurses, da sich Gewinne und Verluste nicht vollständig aufheben.

=> nachteilig für die Option ist dagegen, dass der Zeitwert im Zeitverlauf kontinuierlich abnimmt, d.h. $dc/dt < 0$

Vorteilhaftigkeitsvergleich für das Halten der Option versus des Haltens des Delta-Hedge-Portfolios aus $\Delta = \frac{dc}{dS}$ Stück Aktien:

- **Eingesparte Finanzierungskosten:** $r\,S\,\frac{dc}{dS}$
- **Finanzierungskosten Option:** $-\,r\,c$
- **Kontinuierlicher Wertverlust der Option:** dc/dt
- **Vorteil aus der Konvexität:** $\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 c}{dS^2}$

Black-Scholes-Merton Differentialgleichung (Hull 15.6)

Wegen Arbitragefreiheit muss die Summe der Terme gleich Null sein (diese Differentialgleichung gilt für beliebige Derivate):

$$rS\frac{dc}{dS} - rc + \frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2c}{dS^2} = 0$$

vgl. Black 1989, Black/Scholes 1973, Merton 1973

Fisher Black (1938 – 1995)
Nobelpreis 1997:
Myron Scholes (*1941), Robert C. Merton (*1944)

Frühe Wegbereiter:
Louis Bachelier (1870-1946), Vinzenz Bronzin (1872–1970)

Black-Scholes-Merton Bewertungsformel (Hull 15.8)

Speziell für einen europäischen Call auf eine dividendenlose Aktie mit Auszahlungsprofil $max(S_T - K, 0)$ ergibt sich eine explizite Lösung der Differentialgleichung:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

mit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dabei ist:

S_0 = Kurs des Basiswertes zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$

$N(x) = P(X < x)$ = kumulative Verteilungsfunktion für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

K = Basispreis bzw. Bezugspreis

r = stetiger Zinssatz

T = Zeit (in Jahren) bis zur Fälligkeit (z.B. T = 1/4)

σ = Volatilität des Underlying (z.B. σ = 30% = 0,3)

Volatilität σ

- Volatilität einzige Einflussgröße des Optionspreises, die in der Realität nicht nicht bekannt ist.

- Modell unterstellt konstante Volatilität, tatsächlich kann sich diese im Zeitablauf ändern (Heteroskedastizität): Z.B. schlagartige Erhöhung der Volatilität zu Beginn der Pandemie.

- historische Volatilität wird aus Vergangenheitsdaten berechnet; implizite Volatilität reflektiert Erwartungen und basiert auf Optionspreisen (VDAX misst die implizite Volatilität.)

- siehe auch: https://www.boerse-frankfurt.de/wissen/handeln/volatilitaet

Bewertung europäischer / amerikanischer Calls / Puts

Europäischer Call:	**Black-Scholes-Merton Formel**
Amerikanischer Call:	**Gleicher Wert wie europäischer Calls, da das Recht auf vorzeitige Ausübung nie ausgeübt wird** (zumindest bei einer dividendenlosen Aktie, sonst numerische Verfahren)
Europäischer Put:	**Bewertung über Put-Call-Parität**
Amerikanischer Put:	**Numerische Verfahren**

„Greeks“ (Sensitivitätskennzahlen)

„Delta“	1. Ableitung nach dem Aktienkurs S: $\frac{dc}{dS}$
„Gamma“	2. Ableitung nach dem Aktienkurs S: $\frac{d^2c}{dS^2}$
„Rho“	Ableitung nach dem Zins r: $\frac{dc}{dr}$
„Theta“	Ableitung nach der Zeit t: $\frac{dc}{dt}$
„Vega“	Ableitung nach der Volatilität σ: $\frac{dc}{d\sigma}$

4. Bewertung mit Binomialbäumen, insb. amerikanische Puts / Optionen auf dividendentragende Aktien

Beispiel:	Investition in $t = 0$	Payoff f_d „down“-Szenario	Payoff f_u „up“_ Szenario
Aktie:	- 340	300	400
Anlage/Kredit zu 10%:	- 100	110	110
1 Aktie und 273 € Kredit:	- 340 + 273 = - 67	300 - 273*1,1 = 0	400 - 273*1,1 = 100
-1 Aktie (Leerverkauf) u. 364 € Geldanlage:	340 - 364 = - 24	-300 + 364*1,1 = 100	-400 + 364*1,1 = 0
Call mit Basis 350:	?	0	50

Zusammenfassung

Portfolio A:

Zusammensetzung:	**1 Aktie und 273 € Kredit:**
Investitionssumme:	**67 €**
Payoffs:	f_{down} **= 0 € und** f_{up} **= 100 €**

Portfolio B:

Zusammensetzung:	**-1 Aktie** (Leerverkauf) **und Geldanlage 364 €**
Investitionssumme:	**24 €**
Payoffs:	f_{down} **= 100 € und** f_{up} **= 0 €**

- jeder Euro im „up"-Szenario kostet 67 Cent

- jeder Euro im „down"-Szenario kostet 24 Cent

- z.B. ist der Payoff der Option 50 € im „up"-Szenario und 0 € im „down"-Szenario => Optionspreis 50 * 0,67 = 33,5 €

- die allgemeine Bewertungsformel für ein Derivat mit Payoff f_u im „up"-Szenario und f_d im „down"-Szenario lautet:

$$f = 0{,}67 f_u + 0{,}24 f_d = \frac{0{,}74 f_u + 0{,}26 f_d}{1{,}1}$$

Beispiele:

- **Aktie (f_{up} = 400 €; f_{down} = 300 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 400 + 0{,}26 \cdot 300}{1{,}1} = 340$$

- **Geldanlage (f_{up} = 110 €; f_{down} = 110 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 110 + 0{,}26 \cdot 110}{1{,}1} = 100$$

- **Option (f_{up} = 50 €; f_{down} = 0 €):**

$$f = \frac{0{,}74 \cdot 50 + 0{,}26 \cdot 0}{1{,}1} = 33{,}6$$

Allgemeine Bewertungsformel (Berechnung von *p*, Hull 13.1)

- Aktie steigt von S_0 entweder auf $S_0 u$ oder fällt auf S_0 d, wobei $u > 1$ und $d < 1$

- (stetiger) risikoloser Zins r

- dann lautet die allgemeine Bewertungsformel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{rT}} \qquad \text{mit} \quad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Kontrollrechnung für fiktive W-keit *p:*

- hier: $S_0 = 340$, $S_0 u = 400$ und $S_0 d = 300$,

also $u = \frac{400}{340}$ und $d = \frac{300}{340}$

Zusammen mit $e^{rT} = 1{,}1$ ergibt sich:

$$p = \frac{1{,}1 - \frac{300}{340}}{\frac{400}{340} - \frac{300}{340}} = \frac{1{,}1 * 340 - 300}{400 - 300} = 0{,}74$$

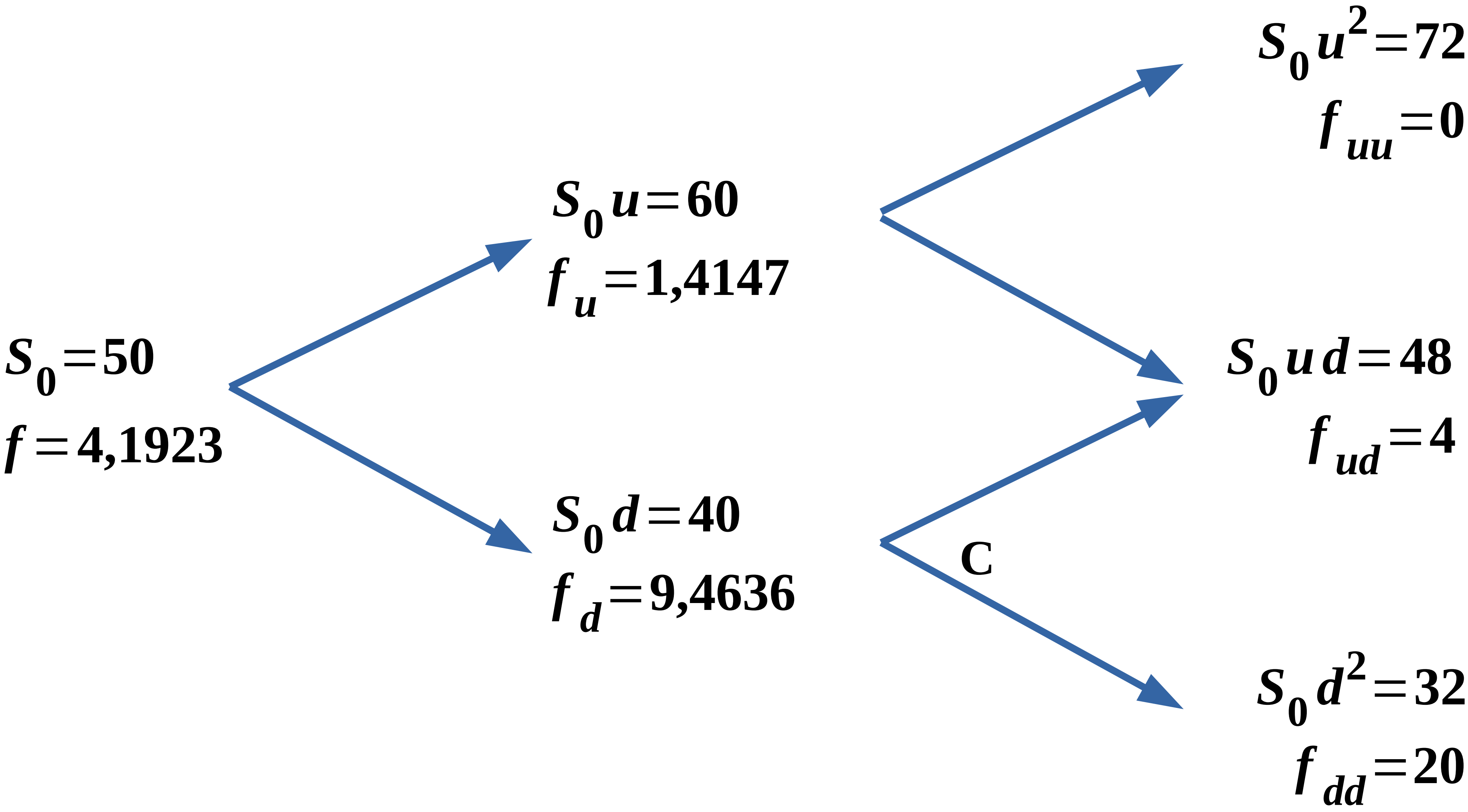
Risikoneutrale Bewertung (Hull 13.2)

- die allgemeine Bewertungsformel kann als diskontierter Erwartungswert interpretiert werden.

- die Bewertung kann also so erfolgen, „als ob“ allseitige Risikoneutralität vorliegen würde.

- beachte, dass über die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten des up- und down-Szenarios keine Annahmen getroffen wurden. Diese müssen also nicht mit p und $1 - p$ übereinstimmen (außer es liegt allgemeine Risikoneutralität vor)

Bewertung einer <u>europäischen Put-Option</u> (K = 52 €)



Bewertung einer europäischen Put-Option (Hull 13.4)

- bewertet wird ein europäischer Put mit Basispreis *K* = 52 € und Restlaufzeit *T* = 2 Jahre

- der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird in zwei Abschnitte der Länge $\Delta t = 1$ eingeteilt

- der aktuelle Aktienkurs ist $S_0 = 50$, weiterhin gilt *u* = 1,2 und *d* = 0,8 (=> Aktienkurs ± 20% je Zeitschritt) und *r* = 5%

- in den Endpunkten kann der Wert des Puts unmittelbar aus $max(52 - S_T, 0)$ berechnet werden.

- hiervon ausgehend kann sukzessive auch für alle davor liegenden Knotenpunkten der Wert des Puts berechnet werden (Rückwärtsinduktion)

- anzuwenden dabei ist jeweils die Formel:

$$f = \frac{p f_u + (1-p) f_d}{e^{r\Delta t}} \quad \text{mit:} \quad p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{0{,}05 \cdot 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}6282$$

- z.B. gilt im Knoten C: $\frac{0{,}6282 \cdot 4 + (1 - 0{,}6282) \cdot 20}{e^{0{,}05 \cdot 1}} = 9{,}4636$

- Endergebnis: Wert des europäischen Puts f = 4,1923 €

Abwandlung: Amerikanische Put-Option (Hull 13.5)

$S_0 u^2 = 72$

$f_{uu} = 0$

$S_0 u = 60$

$f_u = 1{,}4147$

$S_0 = 50$

$f = 5{,}0894$

$S_0 u d = 48$

$f_{ud} = 4$

$S_0 d = 40$

$f_d = 12$

C

$S^{2}_{0\,d} = 32$

$f_{dd} = 20$

- würde es sich um einen amerikanischen Put handeln, dann muss in jedem Knoten überprüft werden, ob sich eine vorzeitige Ausübung eventuell lohnt.

- dies ist im Knoten C tatsächlich der Fall, da bei Ausübung $max(52-40, 0)=12$ erzielt werden können, während der Wert einer europäischen Puts in diesem Knoten nur 9,4636 beträgt.

- der Wert eines amerikanischen Puts ist also:

$$f = \frac{0{,}6282 \cdot 1{,}4147 + (1-0{,}6282) \cdot 12}{e^{0{,}05 \cdot 1}} = 5{,}0894$$

Amerikanischer Call auf dividendenzahlende Aktie (Hull 21.3)

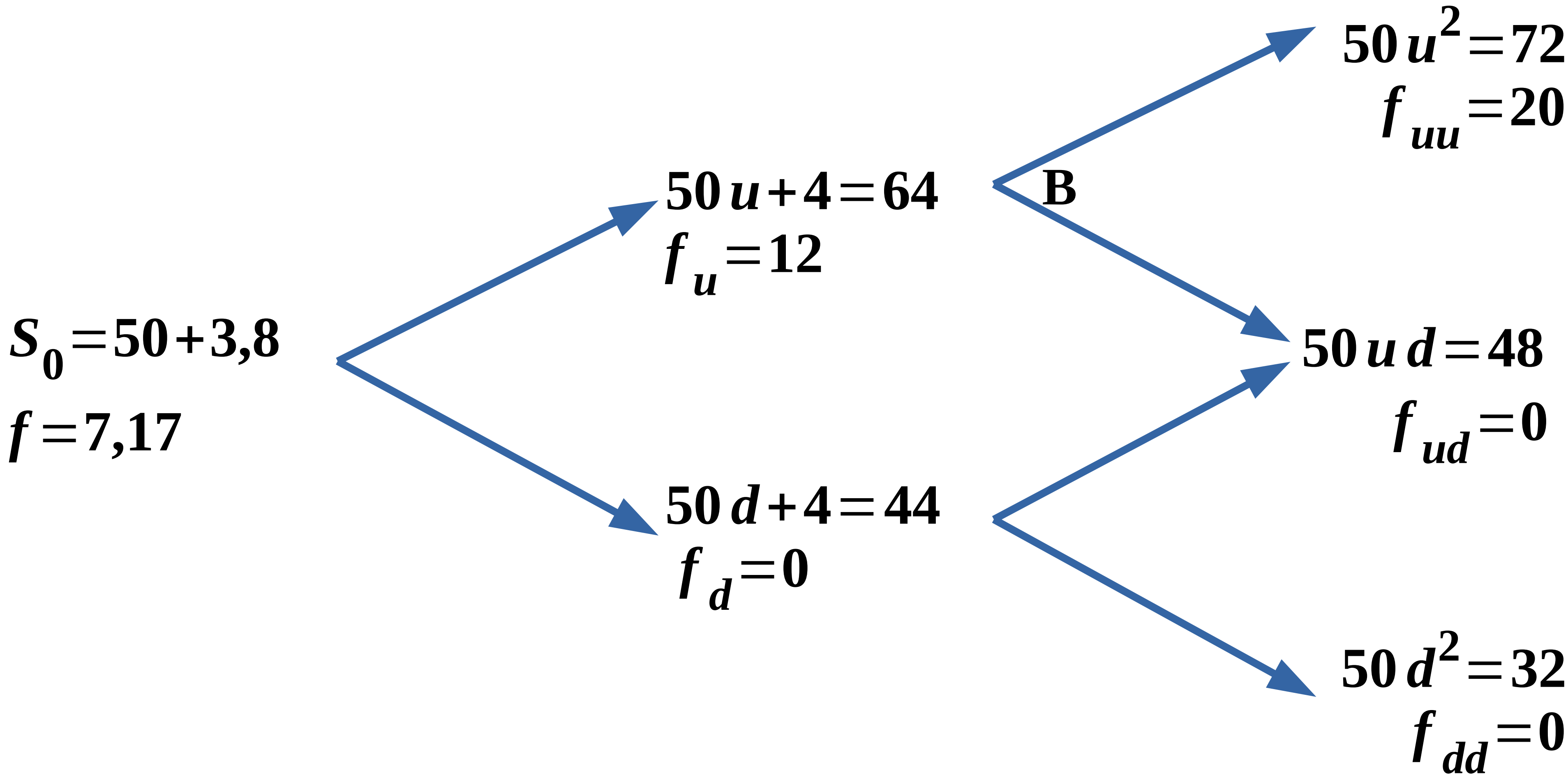
- Betrachtet wird ein amerikanischer Call mit $K = 52$ €

- sei S_0 = 53,8 € und es sei bekannt dass in $t = 1$ eine Dividende von 4 € gezahlt wird.

- von den S_0 = 53,8 € entfallen $4e^{-0,05} = 3,8$ auf die Dividende

- für S_0^* = 50 € wird der Zufallsprozess wie oben modelliert

- im Knoten B lohnt sich die vorzeitige Ausübung, weil man sonst auf die Dividende verzichten würde. Der Wert des Calls im Knoten B wäre andernfalls: $\dfrac{0,6282 \cdot 20 + 0}{e^{0,05 \cdot 1}} = 11,95 < 12$


$S_0 = 50 + 3{,}8$
$f = 7{,}17$
$50u + 4 = 64$
$f_u = 12$
$50d + 4 = 44$
$f_d = 0$
B
$50u^2 = 72$
$f_{uu} = 20$
$50ud = 48$
$f_{ud} = 0$
$50d^2 = 32$
$f_{dd} = 0$

Erhöhung der Anzahl an Zeitschritten

- der Optionswert kann immer besser approximiert werden, wenn man die Laufzeit in immer mehr Zeitschritte unterteilt.

- damit die Volatilität im Modell mit der tatsächlichen Volatilität σ der Aktie übereinstimmt, ist $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ zu wählen. (vgl. Cox, Ross, Rubinstein 1979)

(dabei ist bei *n* Zeitschritten $\Delta t = \frac{T}{n}$, wobei die Restlaufzeit *T* der Option üblicherweise in Jahren gemessen wird und *σ* ebenfalls die Volatilität der jährlichen Renditen bezeichnet)

Übergang zum Black-Scholes-Merton-Modell

- im Grenzfall mit unendlich vielen Zeitschritte konvergiert das Modell gegen die bekannte Black/Scholes-Formel

- daher lässt sich der Wert einer Option auch als diskontierter Erwartungswert schreiben (Hull 15.8):

$$c = \frac{E[max(S_T - K, 0)]}{e^{rT}} \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{E[max(K - S_T, 0)]}{e^{rT}}$$

Dabei ist S_T log-normalverteilt, d.h. der Logarithmus $\ln(S_T)$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(S_0)+(r-\sigma^2/2)T$ und Varianz $\sigma^2 T$ (Hull, Anhang Kapitel 15)

3. Ausblick: Andere Derivate, insb. Swaps

Zinsswaps

- in der einfachsten Form Tausch von fixen und variablen Zinszahlungen (z.B. Euribor+x oder Libor+x).

- Zinsswaps sind außerbörsliche Geschäfte.

- Das Volumen der Zinsswaps macht einen Großteil des OTC Derivatemarktes aus.

- Definitionen der International Swaps and Derivatives Association werden als Standard-Vertragswerk genutzt.

Bank

Kreditportfolio

2% Festzins

Unternehmen

Festzinskredit
5 Jahre

Zinsänderungsrisiko:

Wenn der Marktzins von 2% auf 4% steigt, sinkt der Barwert eines endfälligen Kredites mit 2% Festzins von 100.000 € auf 91.096 €

Bank

Kreditportfolio

2% Festzins

1-Monats-Euribor

Derivatemarkt

Kontrahent

2% Festzins

Unternehmen

Festzinskredit
5 Jahre

Durch den frühzeitigen Abschluss eines Zinsswaps (fixe gegen variable Zinszahlungen) kann das Zinsänderungsrisiko gehedgt werden. Die Bank erhält immer den marktüblichen Zins.

Eigenschaften von Zinsswaps

- an regelmäßigen Fixing-Terminen (z.B. halbjährlich) wird der für die folgende Periode nachschüssig auf einen bestimmten Nominalbetrag zu zahlende variable Zins festgelegt.

- da nur die Differenz zwischen fixen und variablen Zins getauscht wird, ist nur der Differenzempfänger einem Kreditrisiko ausgesetzt.

Bewertung von Zinsswaps (vgl. auch Hull 7.7, Beispiel 7.2)

- die Konditionen werden so gewählt, dass zu Beginn die Barwerte der festen und der variablen Zinszahlungen übereinstimmen. Der Zinsswaps hat für beide Parteien zunächst den Wert Null.

- ändert sich später der Marktzins, dann weichen die Barwerte voneinander ab. Es entsteht ein Wiederbeschaffungsrisiko für die Partei, für die der Swap einen positiven Barwert aufweist

- Um die Berechnung zu vereinfachen, wird fiktiv der Tausch der Nominalbeträge bei Laufzeitende unterstellt.
- zu bewerten ist dann die Differenz zwischen einer festverzinslichen und einer variabel verzinsten Anleihe.
- die festverzinsliche Anleihe kann durch Diskontierung des gegebenen Cashflows bewertet werden.
- bzgl. der variabel verzinsten Anleihe ist klar, dass deren Wert an den Zinsanpassungsterminen gleich dem Nominalbetrag ist.

- liegt der Bewertungsstichtag dagegen zwischen zwei Zinsanpassungsterminen, ergibt sich der Wert der variabel verzinsten Anleihe wie folgt:

$$\left(L+k^*\right)e^{-r^*t^*}$$

Dabei ist:

***L = N*ominalbetrag**

***k* =* Höhe der Zinszahlung am nächsten Zinsanpassungstermin (wurde am vorherigen Termin festgelegt)**

***r* =* aktueller Zins**

***t* =* Zeit bis zum nächsten Zinsanpassungstermin**

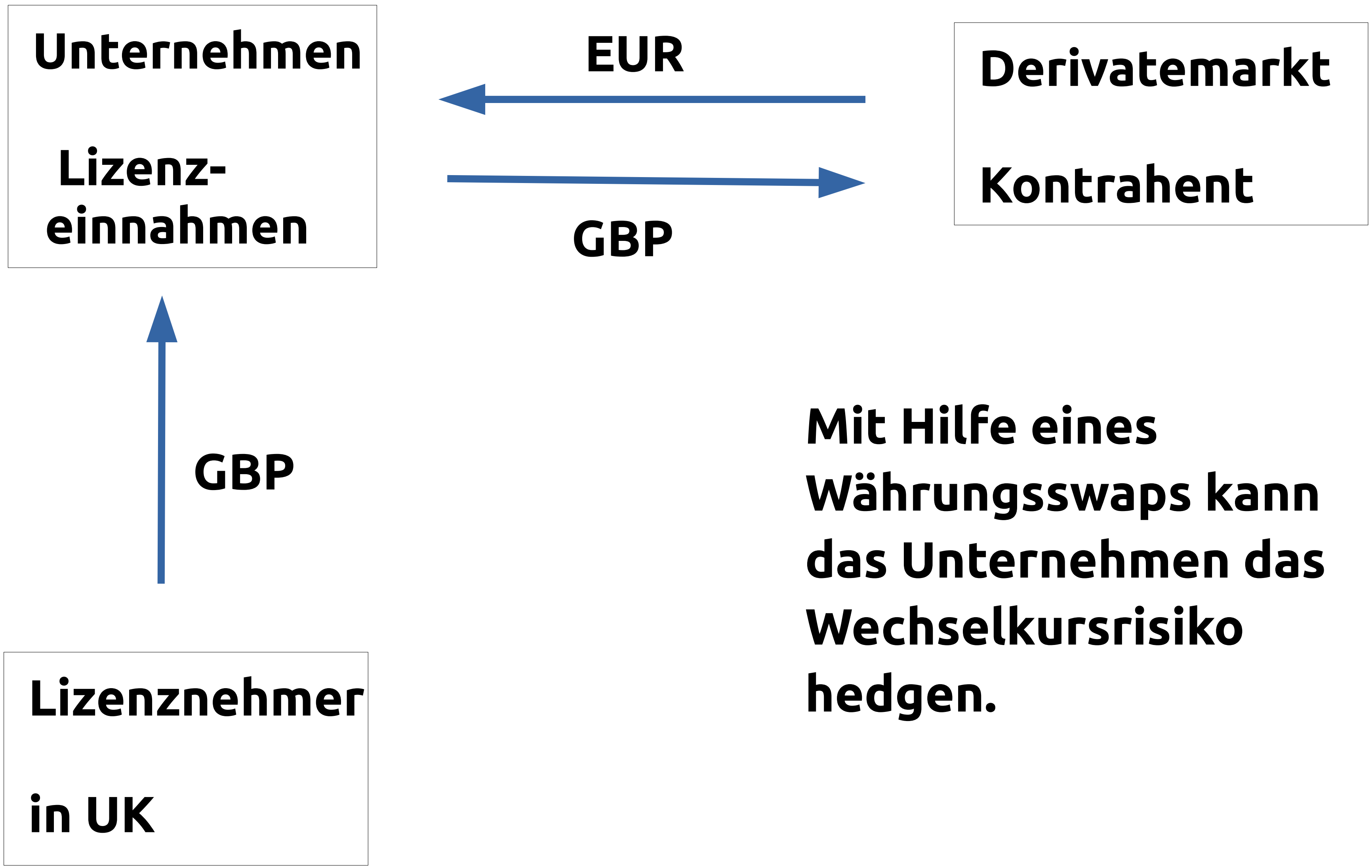
- alternativ kann ein Zinsswaps auch als Portfolio so genannter Forward Rate Agreements bewertet werden:

Bei einem Forward Rate Agreement wird bereits heute vereinbart, für einen festgelegten Zeitraum, der erst zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft beginnt, statt dem dann gültigen variablen Marktzins einen vorab festgelegten Festzins zu zahlen.

Währungsswaps

- ein ansonsten nur im Inland tätiges Unternehmen hat jährliche Lizenzeinnahmen aus UK von 100.000 GBP

- für dieses Unternehmen kann eine Swapvereinbarung sinnvoll sein, bei der jährlich 100.000 GBP zu zahlen sind und ein konstanter jährlicher Eurobetrag empfangen wird.



Mit Hilfe eines Währungsswaps kann das Unternehmen das Wechselkursrisiko hedgen.

Bewertung von Währungsswaps

- zu vergleichen sind die Barwerte eines Cahflows in heimischer und eines Cahflows in fremder Währung.

- der Barwert des Cashflows in heimischer Währung kann wie üblich durch Diskontierung berechnet werden.

- für den Cashflow in Fremdwährung kann zunächst der Barwert in Fremdwährung berechnet werden, dieser Barwert wird dann im zweiten Schritt entsprechend dem aktuellen Wechselkurs in heimische Währung umgerechnet.

- eine alternative Berechnungsmethode wäre, jede zukünftige Zahlung in Fremdwährung mit den heutigen Terminkursen in heimische Währung umzurechnen. Statt einem Cashflow in Fremdwährung erhält man so einen Cashflow in heimischer Währung, dessen Barwert wie üblich berechnet werden kann.

Literatur:

- Ahn, D. P. (2018): Principles of commodity economics and finance, MIT Press.
- Black, F., M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy. 81, 3, S. 637–654.
- Black, F. (1989), How We Came up with the Option Formula, The Journal of Portfolio Management, Vol. 15, Winter, S. 4-8.
- Cox, J. C., S. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics. Nr. 7, S. 229–263.
- Hull, J. (2015): Optionen, Futures und andere Derivate 9. Auflage
- Inhaltsverzeichnis: *http://d-nb.info/1075875099/04↑)*
- Kaldor, N. (1939): Speculation and Economic Stability, in: Review of Economic Studies, vol. 7, issue 1, S. 1-27
- Kern, A. (2010): Commodity Futures - Enhanced Strategien zur Performancesteigerung?
- Lewis, M. (2007): The universe of commodity indices. Commodity Now 11, 40–46.
- Merton, R. C. (1973): Theory of Rational Option Pricing. In: The Bell Journal of Economics and Management Science. 4, S. 141–183.
- Rau-Bredow, H. (2022): Contango and Backwardation in Arbitrage-Free Futures-Markets online: *https://mpra.ub.uni-muenchen.de/111688*
- Samuelson, P. (1965): Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, 6, 41-49.