Risikomanagement in Banken:

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Diese Version: Mai 2018

Gliederung

1. Risiko: Begriff und Definition

2. Risikomaße

3. Summe unabhängiger Zufalls-
   variablen

Was ist Risiko?

„There are known knowns; there are things we know we know. We also know there are known unknowns; that is to say we know there are some things we do not know. But there are also unknown unknowns – there are things we do not know we don't know.“

US-Verteidigungsminister Donald Rumsfeld am 12. Februar 2002 auf einer Pressekonferenz

<table>
<tr>
<td>Known Knowns

Zukünftige Ereignisse bekannt

kein Risiko/Unsicherheit</td>
<td>Unknown Knowns

?

Verdrängte Risiken</td>
</tr>
<tr>
<td>Known Unknowns

Szenarien und Wahrscheinlich-keiten sind bekannt</td>
<td>Unknown Unknowns
Nicht messbares Risiko
- Knight (1921) Risk, Uncertainty and Profit (Knightian Uncertainty)
- Keynes (1927) Treatise on probability
- Taleb (2007) The Black Swan</td>
</tr>
</table>

Risko versus Unsicherheit

Unsicherheit (im engeren Sinne):

- Nur mögliche Szenarien sind bekannt, aber keine Eintrittswahrscheinlichkeiten

Risiko:

- Mögliche Szenarien und deren Eintritts-wahrscheinlichkeiten sind vollständig bekannt

Risiko lässt sich berechnen: Von 100 Kraftfahrzeugen haben (durchschnittlich) pro Jahr 5 einen Unfall. Alle 100 Autobesitzer müssen also so viel einzahlen, dass die 5 Unfallgegner entschädigt werden können (plus Marge der Versicherungen).

Entscheidungen bei Unsicherheit:

- **Dominanzprinzip**

  Wähle Alternative A, wenn diese in jedem Szenario ein besseres Ergebnis liefert als Alternative B

- **Minimax-Regel:**

  Unterstelle für jede Handlungsalternative den Worst Case und wähle dann die beste Alternative.

- **Stresstests**

  Würde die heutige Bank in einem gedachten Zukunfts-szenario noch über ausreichend Eigenkapital verfügen?

  Beispielszenario: Zinsen steigen für alle Laufzeiten um 2% (sog. Baseler Zinsschock) => Auswirkung auf die Bilanz einer Bank?

EU-weiter Stresstest 2018

- Vergleich der Widerstandsfähigkeit der Banken im Basisszenario *(Wirtschaft wächst wie von der EZB prognostiziert)* und adversen Szenario *(BIP 8,3% unter Basisszenario in 2020)*

- Bestandteile des adversen Szenarios sind:

- *Abrupt and sizeable repricing of risk premia in global financial markets*
- *Adverse feedback loop between weak bank profitability and low nominal growth*
- *Public and private debt sustainability concerns*
- *Liquidity risks in the non-bank financial sector*

Probleme bei Stresstests

- Werden Stresstests häufig wiederholt, dann richten die Banken ihr Geschäftsmodell möglicherweise mehr an Stressszenarien als an realen Gefahren aus.

- Bestimmte Szenarien werden nicht berücksichtigt (z.B. lang anhaltende Deflation; Rückgang Marktliquidität wg QE).

- Dexia-Bank hatte im Sommer 2011 den EU-Bankenstresstest mit Bravour bestanden (Kernkapital mindestens 10,9% in allen Stressszenarien), musste aber nur 3 Monate später von Belgien, Frankreich, Luxemburg gerettet/übernommen werden.

2. Risikomaße

Varianz σ^2

$$\sigma^2(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \text{mit} \quad \mu = E(X)$$

Rechenregeln:

$$\sigma^2(aX+b) \quad = \quad a^2\,\sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X+Y) \quad = \quad \sigma^2(X) + 2\,\underbrace{cov(X,Y)}_{=\,0 \text{ für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen}} + \sigma^2(Y)$$

- **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Aufgabe:

Eine Münze wird n-mal geworfen. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert „1“, wenn beim i-ten Wurf Zahl geworfen wird, und sonst den Wert „0“.
Berechne Erwartungswert μ und Varianz σ^2!

Lösung:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe (Fortsetzung):

Die Münze wird n-mal geworfen. $Y = X_1 + \ldots + X_n$ bezeichne die Anzahl der Würfe, in denen „Zahl" geworfen wird. Berechne Erwartungswert μ und Varianz σ^2!

Lösung:

$$\mu\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\sigma^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \sigma^2\left(X_1\right) + \ldots + \sigma^2\left(X_n\right) = \frac{n}{4}$$

Value at Risk (VaR)

- **Risikokennzahl, entwickelt Anfang der 90er Jahre in der Bank J.P. Morgan (4-15 Report an den CEO Dennis Weatherstone).**
- **Alle Risiken der Bank aus Geschäften mit Aktien, Anleihe, Währungen etc. sollte zu einer anschaulichen Kennzahl zusammengefasst werden.**
- **Katastrophale, aber sehr unwahrscheinliche Szenarien bleiben unberücksichtigt**
- **<u>Value at Risk ist der mögliche Tagesverlust, der in 95% der Fälle nicht überschritten wird</u> (falls z.B. Haltedauer = 1 Tag und Konfidenzniveau = 95% festgelegt wird)**

Beispiel zur Berechnung des Value at Risk:

- Annahme: Handelsportfolio der Bank entwickelt sich parallel zum DAX
- Betrachte die täglichen prozentualen Veränderungen des DAX während der letzten 200 Tage
- Ordne diese Tagesrenditen der Größe nach
- Der elftschlechteste Wert ist der Value at Risk mit Konfidenzniveau 95% und Haltedauer 1 Tag

DAX-Tagesrenditen 26.07.2017 – 11.05.2018 (200 Tage)

Datenquelle: de.finance.yahoo.com

Größte Tagesverluste:

1	Do 08.Feb 18	-2,62%
2	Di 06.Feb 18	-2,32%
3	Fr 02.Mrz 18	-2,27%
4	Do 01.Mrz 18	-1,97%
5	Fr 23.Mrz 18	-1,77%
6	Do 22.Mrz 18	-1,70%
7	Fr 02.Feb 18	-1,68%
8	Di 13.Mrz 18	-1,59%
9	Do 09.Nov 17	-1,49%
10	Di 29.Aug 17	-1,46%
11	Do 01.Feb 18	-1,41%
12	Mo 19.Mrz 18	-1,39%

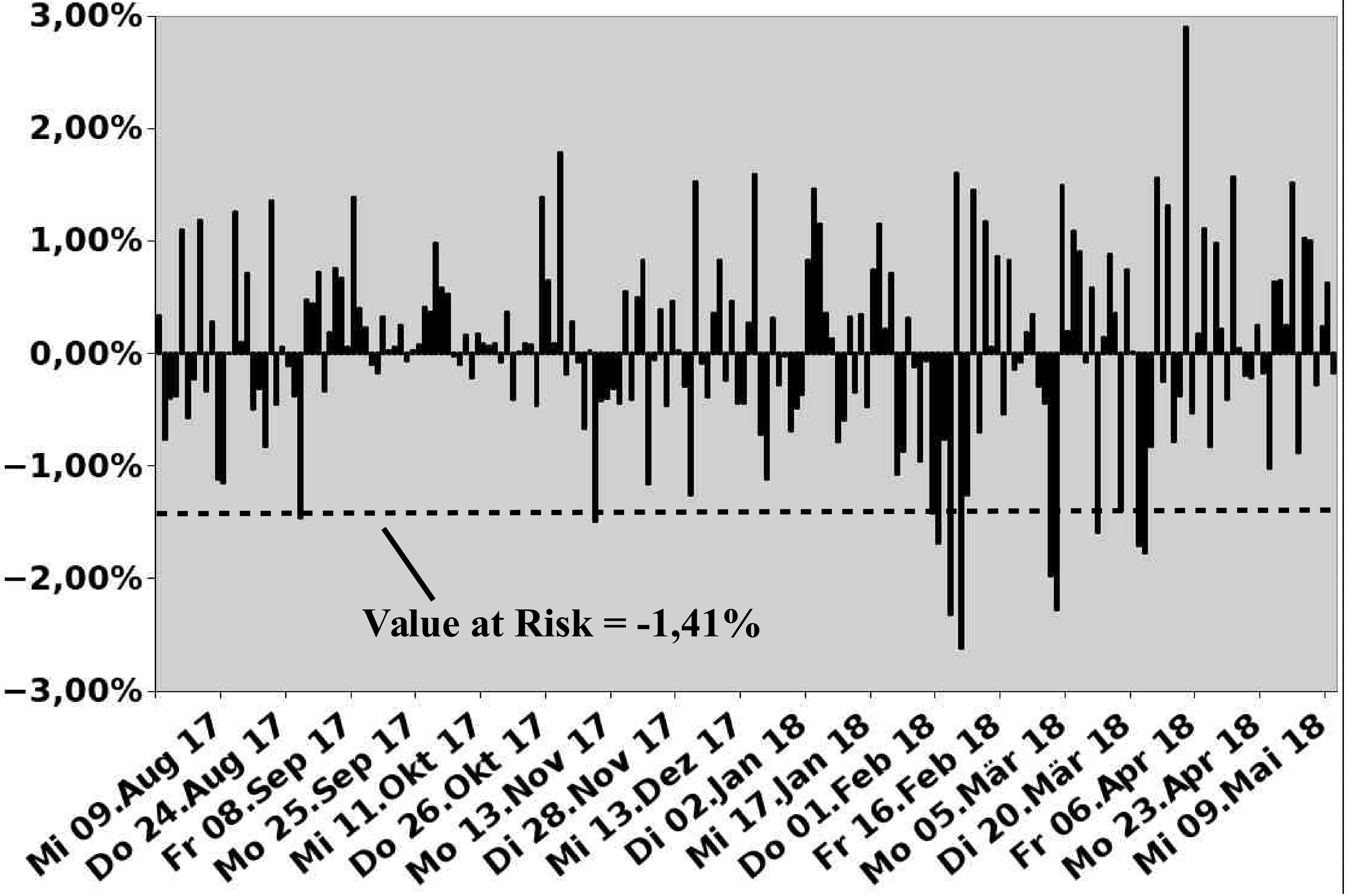
Value at Risk (95%)

= elftschlechtester Wert

= -1,41%

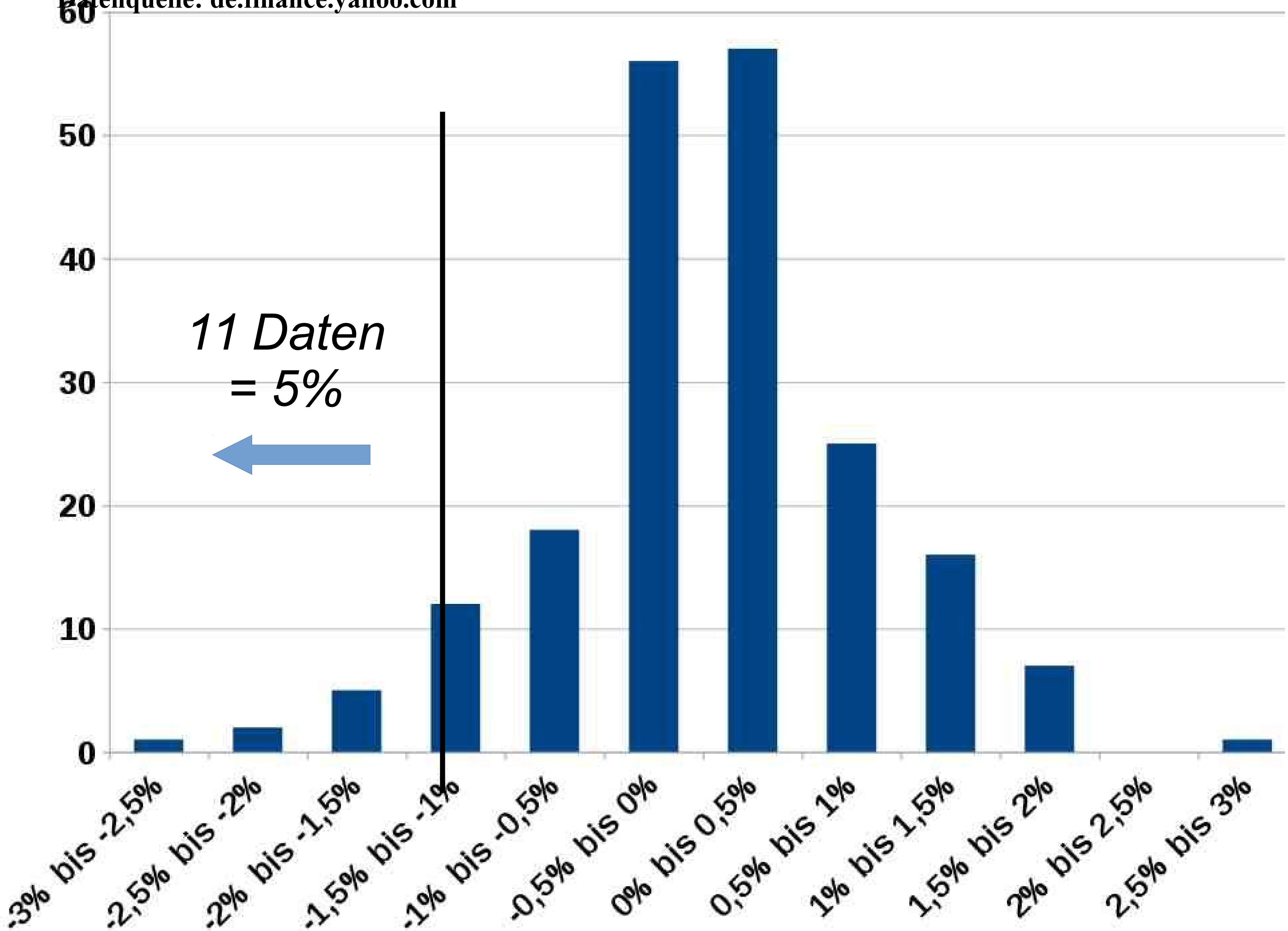
DAX-Tagesrenditen 26.07.2017 – 11.05.2018 (200 Tage)

Datenquelle: de.finance.yahoo.com



DAX-Tagesrenditen 26.07.2017 – 11.05.2018 (200 Tage)

Datenquelle: de.finance.yahoo.com



Value at Risk und Normalverteilung

Bei einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ (kein Drift) gilt:

Value at Risk (95%) = 1,65 mal Standardabweichung σ

<u>Probe:</u>

Im obigen Sample (Dax-Renditen) ist *σ =0,83%*, also

Value at Risk *(95%) ≈ -1,65 σ = -1,65 * 0,83% = -1,37%*

Begründung:

$$5\% \;=\; P\left(R_{DAX} < x\right)$$

$$<=> \quad 5\% \;=\; P\left(\frac{R_{DAX} - \mu}{\sigma} \;<\; \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

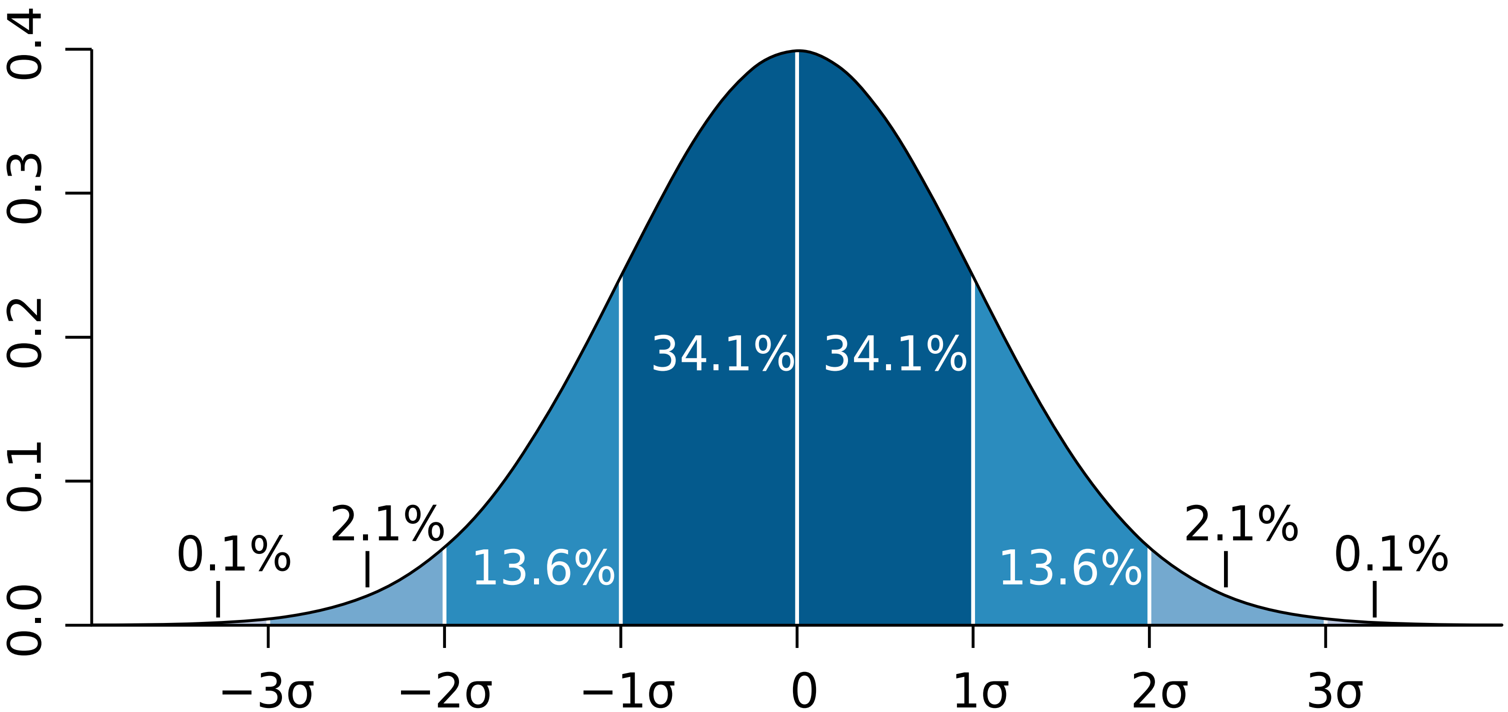
$\dfrac{R_{DAX} - \mu}{\sigma}$ ist standard-normalverteilt mit $\mu = 0$ und Varianz $\sigma = 1$, also

$$<=> \quad 5\% \;=\; N\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

N(x) = P(X<x) kumulative Verteilungsfkt. der Standard-Normalverteilung

$$<=> \quad x \;=\; \mu \;+\; \sigma \;\; N^{-1}\left(5\%\right) \;=\; \mu \;-\; 1{,}65 \cdot \sigma$$

σ Intervalle bei der Standard-Normalverteilung



Quelle: Wikipedia

Beispiel: Value at Risk (97,8%) = 2 σ (warum?)

σ - Multiplikatoren beim Value at Risk für verschiedene Konfidenzniveaus

1,65	95%
2	97,8%
2,33	99%
3	99,9%
4	99,997%

Beispiel 4 σ – Ereignis:

- **W-keit für Abweichung vom Erwartungswert um mehr als 4 σ ist 0,003% =** $\frac{1}{33.333}$ **(siehe oben)**

- **33.333 = 130 Jahre mal 256 Handelstage**

- **Also durchschnittlich alle 130 Jahre Tagesverlust beim Dax von mehr als** ***4 σ = 4 * 0,83% = 3,32%***

- **Welche problematischen Annahme wurde vorausgesetzt ?**

Value at Risk und Haltedauer

$$\text{Value at Risk}_{T\ \text{Tage}} = \sqrt{T}\ \text{Value at Risk}_{1\ \text{Tag}}$$

Begründung:
Die Rendite über T Tage ist approximativ die Summe der Tagesrenditen R_i, daher:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{T\ Tage} = \sigma^2 (R_1 + \ldots + R_T)}$$

$$\boldsymbol{= \sigma^2 (R_1) + \ldots + \sigma^2 (R_T) = T\, \sigma^2_{1\ Tag}}$$

Beispiel: 1 Jahr ≈ 256 Handelstage =>

$$\text{VaR}_{1\ \text{Jahr}} = \sqrt{256}\ \text{VaR}_{1\,\text{Tag}} = 16 \cdot \text{VaR}_{1\,\text{Tag}}$$

Value at Risk und Risikoaggregation

Deutsche Bank Geschäftsbericht 2001 S. 187: Value at Risk des Konzerns zum Jahresende 2001:

Zinsrisiko	36,07 Mio. €
Aktienkursrisiko	20,09 Mio. €
Fremdwährungsrisiko	3,55 Mio. €
Rohwarenpreisrisiko	3,52 Mio. €
Diversifikationseffekt	- 21,64 Mio. €
Summe	41,58 Mio. €

Aufgabe: Quadrat der Summe ist gleich Summe der Quadrate der einzelnen Asset-Klassen. Mit welchen (problematischen) Annahmen wurde gearbeitet ?

Lösung:

$$\text{VaR}(X+Y) = 1{,}65 \;\; \sigma(X+Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad [\text{VaR}(X+Y)]^2 = 1{,}65^2 \;\; \sigma^2(X+Y)$$

$$= 1{,}65^2 \;\; \sigma^2(X) + 1{,}65^2 \;\; \sigma^2(Y)$$

$$= [\text{VaR}(X)]^2 + [\text{VaR}(Y)]^2$$

Annahmen:

- ***X* und *Y* stochastisch unabhängig**
- ***X* und *Y* normalverteilt**

Value at Risk und Diversifikation

- Anleihehändler in einer Bank. Annahme: Alle Anleihen haben ein Ausfallrisiko von 0,9% (Haltedauer 1 Jahr) und Ausfallereignisse sind stochastisch unabhängig.

- Händler A kauft ausschließlich Volkswagen-Anleihen.

- Händler B verteilt seine Investition gleichmäßig auf Anleihen von Volkswagen und RWE.

- Vergleiche den Value at Risk (99%) !

Theorie der kohärenten Risikomaße

Vgl. Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J. M.; Heath, D. (1999). "Coherent Measures of Risk". Mathematical Finance 9 (3): 203-228.

Risikomaß: Einer Zufallsvariablen X wird eine reelle Zahl $\rho(X)$ zugeordnet

Ein monetäres Risikomaß erfüllt folgende Axiome:

- **Translationsinvarianz:**
  Zusätzliche cash-Einzahlung in Höhe von m reduziert das Risiko um m: $\rho(X + m) = \rho(X) - m$
- **Monotonie:**
  Falls die Zufallsvariable X immer ein besseres Ergebnis liefert als Y, dann hat X ein geringeres Risiko:
  $X \geq Y$ **in jedem Szenario** $\Rightarrow$ $\rho(X) \leq \rho(Y)$

Aufgabe

- Betrachte die Zufallsvariablen $X = 20 \pm 10$ € (jeweils mit W-keit *50%*) und $Y = 1 \pm 1$ €.

- Berechne jeweils die Varianz bzw. Standardabweichung

- Sind Varianz bzw. Standardabweichung ein monetäres Risikomaß? Welches Axiom wird ggf. verletzt?

Ein monetäres Risikomaß heißt <u>kohärent</u>, wenn zusätzlich folgende Axiome erfüllt sind:

- <u>Positive Homogenität</u>
  Wenn das Portfolio verdoppelt oder verdreifacht etc. wird, dann verdoppelt bzw. verdreifacht sich auch das Risiko: $\rho(aX) = a\,\rho(X)$ für alle $a \geq 0$

- <u>Subadditivität</u>
  Falls X und Y in einem Portfolio vereinigt werden, dann ist das Risiko der Summe kleiner als die Summe der Risiken (Diversifikation): $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Aufgabe:
Ist Value at Risk ein kohärentes Risikomaß? Welches Axiom wird ggf. verletzt?

Expected Shortfall

- … ist ein kohärentes Risikomaß
- … dient in Basel IV zur Berechnung von Marktrisiken
- … wird auch als *Conditional Value at Risk CVaR* oder *Expected Tail Loss ETL* bezeichnet
- … ist definiert als der Durchschnitt <u>aller</u> Verluste mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit von z. B. höchstens 5% : $ES = E(X \mid X \leq VaR_{95\%})$
- In die Berechnung gehen also auch Ausreißer-Verluste mit Eintrittsw-keit < 5% ein.

DAX-Tagesrenditen 26.07.2017 – 11.05.2018 (200 Tage)

Datenquelle: de.finance.yahoo.com

1	Do 08.Feb 18	-2,62%
2	Di 06.Feb 18	-2,32%
3	Fr 02.Mrz 18	-2,27%
4	Do 01.Mrz 18	-1,97%
5	Fr 23.Mrz 18	-1,77%
6	Do 22.Mrz 18	-1,70%
7	Fr 02.Feb 18	-1,68%
8	Di 13.Mrz 18	-1,59%
9	Do 09.Nov 17	-1,49%
10	Di 29.Aug 17	-1,46%
11	Do 01.Feb 18	-1,41%
12	Mo 19.Mrz 18	-1,39%

Expected Shortfall (95%)

= Durchschnitt der elf höchsten Verluste

= -1,84 %

3. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

- Gesetz der großen Zahlen
- Zentraler Grenzwertsatz

Simulation (Münzwurf)

Es ergab sich für Anzahl Kopf bei n Münzwürfen:

Versuch Nr.	100 Würfe	10.000 Würfe
1	45	4991
2	52	5028
3	47	4966
4	46	5027
5	45	4954
6	49	5023
7	49	5034
8	59	5018

Relative Häufigkeit von Kopf bei n Münzwürfen:

Versuch Nr.	100 Würfe	10.000 Würfe
1	0,45	0,4991
2	0,52	0,5028
3	0,47	0,4966
4	0,46	0,5027
5	0,45	0,4954
6	0,49	0,5023
7	0,49	0,5034
8	0,59	0,5018

Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \rightarrow \mu = E(X)$$

Der empirische Mittelwert wird für großes n nicht-stochastisch und konvergiert gegen den theoretischen Erwartungswert.

Begründung:

$$\sigma^2\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_n)}{n^2} \leq \frac{\sigma^2_{max} + \ldots + \sigma^2_{max}}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Absolute Abweichung bei n Münzwürfen:

Versuch Nr.	100 Würfe		10.000 Würfe	
1	45	-5	4991	-9
2	52	2	5028	28
3	47	-3	4966	-34
4	46	-4	5027	27
5	45	-5	4954	-46
6	49	-1	5023	23
7	49	-1	5034	34
8	59	9	5018	18

Beobachtung (zentraler Grenzwertsatz):

- **Wenn die Anzahl der Münzwürfe von 100 auf 10.000 erhöht wird (Faktor 100), dann wachsen die absoluten Abweichungen vom Erwartungswert etwa mit dem Faktor 10.**

- **Es bietet sich daher an, folgende Größe zu betrachten:**

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - E\left(X_1 + \ldots + X_n\right)}{\sqrt{n}}$$

- **Diese Größe ist für große n <u>approximativ normalverteilt</u>**

(entweder bei identisch verteilten Zufallsvariablen oder falls z.B. die Lindeberg-Bedingung oder die Ljapunov-Bedingung erfüllt sind)

Aufgabe:

X_i seien stochastisch unabhängig verteilte Zufalls-variablen. Berechne die Varianz von

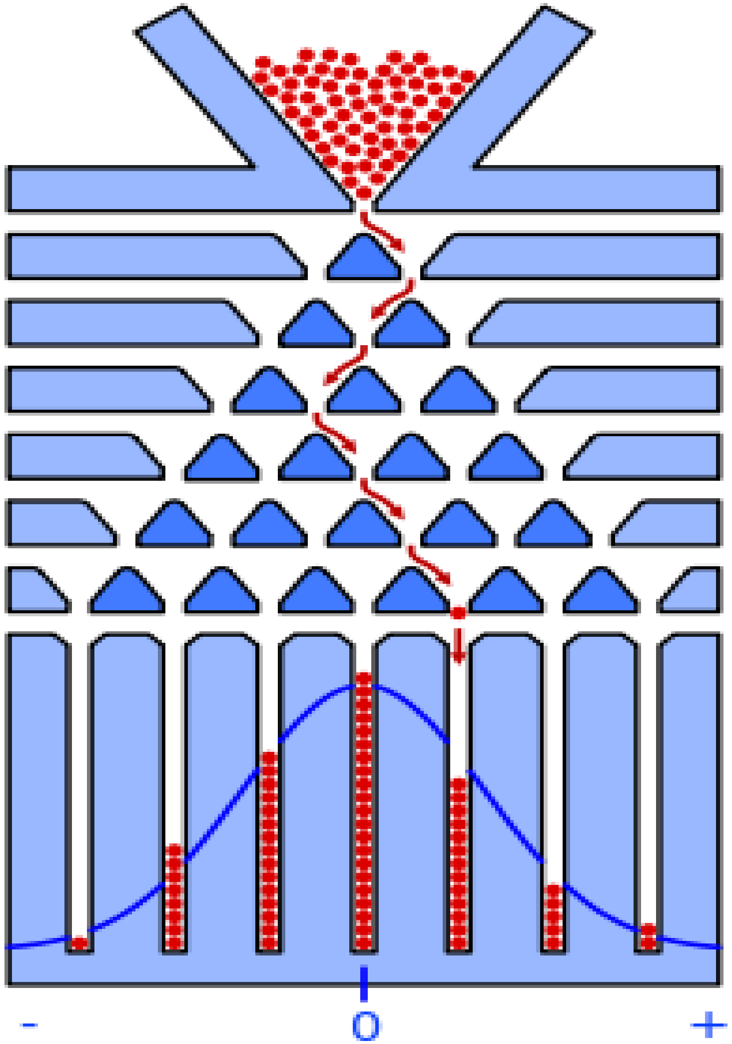
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - E(X_1 + \ldots + X_n)}{\sqrt{n}}$$

und gib eine obere Schranke an!

Lösung:

$$\sigma^2\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - E(X_1 + \ldots + X_n)}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_n)}{n} \leq \sigma^2_{max}$$

Galtonbrett zur Veranschaulichung des Zentralen Grenzwertsatzes



Quelle: Wikipedia

Aufgabe:

Eine Münze wird 100-mal geworfen. Wie hoch ist grob geschätzt die W-keit, dass weniger als 40 Mal Zahl geworfen wird? (vgl. Seite 12 und Seite 20)

Lösung: (Häufigkeit von Zahl ungefähr normalverteilt)

$$\mu = 50$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$$

=> *40 = μ - 2 σ*, die W-keit beträgt also *2,2 %.*
(2σ Ereignis)

Aufgabe (aus dem Internet)

Bloomberg reports that in the four year period from March 10, 2012 through January 10, 2016, (Mr. Senoguchi's) program has predicted the next month's movement of the Nikkei-225 index, up or down, 32 times out of 47, or 68% of the time. How does this compare with a "random" strategy?

- $\mu = \frac{47}{2} = 23{,}5$ **und** $\sigma = \sqrt{\frac{47}{4}} = 3{,}43$
- **Es handelt sich um ein *2,5σ* Ereignis:** $32 = 23{,}5 + 2{,}5 \cdot 3{,}43$
- **W-keit beträgt *0,6%* gemäß Normalverteilung**

Aufgabe:

Eine Bank hat *n = 1.000* Kredite in Höhe von jeweils *1 Mio. €* vergeben. Für alle Kredite sei die *Probability of Default PD = 1 %* und der *Loss Given Default LGD = 100%*.

Zinserträge der Bank sollen in der Rechnung nicht berücksichtigt werden. Die Ausfallereignisse seien stochastisch unabhängig.

a) Die Bank soll mit soviel Eigenkapital ausgestattet sein, dass die Insolvenzwahrscheinlichkeit *0,1%* nicht überschreitet. Berechne den *Value at Risk (99,9%)*

b) Welche Annahme ist problematisch?

Lösung:

- Für den einzelnen Kredit X_i gilt (in Mio. €):

$$\sigma^2(X_i) = (1 - 0{,}99)^2 * 0{,}99 + (0 - 0{,}99)^2 * 0{,}01 = 0{,}01$$

- Für das gesamte Kreditportfolio $Y = X_1 + \ldots + X_n$ gilt:

$$\sigma^2(Y) = 1.000 * 0{,}01 = 10, \quad also \quad \sigma = 3{,}16$$

$$\Rightarrow \quad \text{Value at Risk } (99{,}9\%) \approx 3\sigma \approx 9{,}5 \text{ Mio. €}$$

Annahme der stochastischen Unabhängigkeit ist problematisch!